VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Dans la suite, $(\Omega, \mathscr{A})$ désigne un espace probabilisable, P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et E un ensemble.

I. Variables aléatoires discrètes

I. 1. Généralités

Définition 1 [Variable aléatoire discrète]

Soit $X : \Omega \to E$ une application. On dit que X est une *variable aléatoire discrète* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :

(1) L'image $X(\Omega)$ de X est une partie finie ou dénombrable de E ;

(2) Pour tout élément $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire discrète *réelle*.

Remarque On considère une expérience aléatoire et on note Ω l'ensemble de ses résultats possibles. Une variable aléatoire sur Ω permet d'obtenir des renseignements sur l'expérience aléatoire en associant à chaque réalisation $\omega \in \Omega$ de l'expérience le renseignement $X(\omega) \in E$.

Proposition 1 [Reformulation de la définition]

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
Pour tout $A \subset E$, on a $X^{-1}(A) \in \mathscr{A}$.

Preuve

Remarque Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$, les sous-ensembles $X^{-1}(\{x\})$ pour $x \in X(\Omega)$ ou $X^{-1}(A)$ pour $A \subset E$ sont donc des éléments de la tribu $\mathscr{A}$, c'est-à-dire des événements. En particulier, il est donc possible de calculer leur probabilité.

Notations

- Si $x \in X(\Omega)$, on note plutôt $(X = x)$ ou $\{X = x\}$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$.
- De même, si $A \subset E$, on note plutôt $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$ l'événement $X^{-1}(A)$.
- En particulier, si $E = \mathbb{R}$, on utilisera par exemple les notations $(a \leqslant X \leqslant b)$ ou $\{a \leqslant X \leqslant b\}$ et $(X \geqslant a)$ ou $\{X \geqslant a\}$ pour désigner les événements $X^{-1}([a, b])$ et $X^{-1}([a, +\infty[)$.

I. 2. Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 2 [Loi d'une variable aléatoire discrète]

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. L'application P_X définie sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$ par :

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad P_X(A) = P(X \in A)$$

est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)))$ appelée *loi de X*.

Preuve

Remarques

- Puisque $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, la loi P_X de X est en fait entièrement caractérisée par les valeurs $P_X(\{x\}) = P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$. En effet, en supposant connues les valeurs précédentes et si $A \subset X(\Omega)$, on peut retrouver $P_X(A)$ par $\sigma-$additivité au plus dénombrable de la probabilité P_X en écrivant :

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} P_X(\{x\}) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

- Deux variables peuvent avoir la même loi sans être égales.
  Par exemple, si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$ ne pouvant prendre que les valeurs -1 et 1 et dont la loi est donnée par $P(X = -1) = P(X = 1) = 1/2$, alors $Y = -X$ a la même loi que X alors que $X \neq Y$.
  En revanche, évidemment, deux variables égales ont la même loi.

Méthode [Donner la loi d'une variable aléatoire discrète]

En pratique, pour donner la loi d'une variable aléatoire discrète X définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ on procède en deux étapes :

(1) On détermine les valeurs possibles de X, c'est-à-dire $X(\Omega)$;

(2) Pour chaque valeur possible $x \in X(\Omega)$, on détermine la probabilité de l'obtenir, c'est-à-dire $P(X = x)$.

Exemple On lance une infinité de fois une pièce de monnaie qui tombe sur *Pile* avec probabilité $p \in]0, 1[$ et on appelle X le rang du lancer amenant le premier *Pile*.

Proposition 2 [Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète]

Soit $\mathrm{X} : \Omega \to \mathrm{E}$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
La famille d'événements $((\mathrm{X} = x))_{x \in \mathrm{X}(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Preuve

Remarque En particulier, on a l'identité $\displaystyle\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = 1$.

La proposition qui suit permet de justifier que toute probabilité sur un univers au plus dénombrable peut être vue comme la loi d'une variable aléatoire discrète.

Proposition 3 [Construction d'une variable aléatoire de loi donnée]

- **Cas fini :** Soit $\{x_1, \ldots, x_\mathrm{N}\}$ une sous-partie finie de E.
  Si $(p_1, \ldots, p_\mathrm{N})$ est une famille de N réels positifs vérifiant la relation $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} p_n = 1$, alors il existe un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et une variable aléatoire discrète $\mathrm{X} : \Omega \to \mathrm{E}$ vérifiant :
  $$\forall n \in [\![1, \mathrm{N}]\!], \quad \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = p_i$$
- **Cas dénombrable :** Soit $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une sous-partie dénombrable de E.
  Si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et une variable aléatoire discrète $\mathrm{X} : \Omega \to \mathrm{E}$ vérifiant :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n) = p_n$$

Preuve Admis.

Remarque La proposition précédente est très fréquemment utilisée sans même y faire référence. Par exemple, un énoncé classique du type : « Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = \frac{1}{2^{n+1}} \text{ »}$$

l'utilise pour assurer, étant donné que les termes $1/2^{n+1}$ sont positifs et de somme 1, qu'il existe bien un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et une variable aléatoire $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{N}$ vérifiant la contrainte annoncée. En particulier, on ne s'attache presque jamais à vraiment expliciter l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

Exemple Soit $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On peut construire une variable aléatoire $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{N}$ vérifiant $\mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = \alpha\lambda^n / n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\alpha = e^{-\lambda}$.

II. Couples de variables aléatoires discrètes

Dans la suite du chapitre, on ne mentionne plus les espaces d'arrivée des variables aléatoires discrètes considérées sauf lorsque cela est nécessaire. Ce choix peut se justifier par le fait que si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, l'ensemble réellement utile à considérer est celui des valeurs possibles de X, à savoir $X(\Omega)$, et non E.

II. 1. Notion de couple

Définition 3 [Couple de variables aléatoires discrètes]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
L'application $w \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire discrète.
On parle du *couple de variables aléatoires discrètes* (X, Y).

Preuve

Exemple On lance une infinité de fois une pièce de monnaie qui tombe sur *Pile* avec probabilité $p \in]0,1[$. On appelle X le rang du lancer amenant le premier *Pile* et Y le rang du lancer amenant le deuxième *Pile*.

II. 2. Loi conjointe

Définition 4 [Loi conjointe]

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On appelle *loi conjointe* du couple (X, Y) la loi du couple (X, Y).

Remarque L'ensemble des valeurs possibles du couple (X, Y) étant $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on obtient, d'après ce qui précède, que la loi du couple (X, Y) est entièrement déterminée par la donnée des quantités $P(X = x, Y = y)$ pour $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ où l'on utilise la notation $(X = x, Y = y)$ pour désigner l'événement $(X = x) \cap (Y = y)$.
Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, la loi du couple (X, Y) peut être présentée sous la forme d'un tableau.

Méthode [Donner la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes]

En pratique, pour donner la loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes, on procède en deux étapes :

(1) On détermine les valeurs possibles du couple (X, Y), c'est-à-dire $X(\Omega) \times Y(\Omega)$;

(2) Pour chaque valeur possible $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on détermine la probabilité de l'obtenir, c'est-à-dire la probabilité $P(X = x, Y = y)$.

Exemple On reprend l'exemple précédent.

Proposition 4 [Système complet d'événements associé à un couple]

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
La famille d'événements $\big((X = x, Y = y)\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Preuve Conséquence de la proposition analogue pour une variable aléatoire discrète.

Remarque En particulier, on a l'identité $\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) = 1$.

Exemple Pour l'exemple précédent, on peut vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = n, Y = k) = 1$.

II. 3. Lois marginales

Définition 5 [Lois marginales]

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Les lois de X et Y sont respectivement appelées *première* et *deuxième lois marginales* du couple (X, Y).

Proposition 5 [Calcul des lois marginales]

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

- Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a : $$P(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$
- Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a : $$P(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

Preuve

Exemple On reprend l'exemple précédent et on calcule les lois marginales X et Y du couple (X,Y).

II. 4. Lois conditionnelles

Définition 6 [Lois conditionnelles]

Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et $y\in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y)\neq 0$.

L'application
$$P_{(Y=y)}:\begin{array}{ccc}\mathscr{A} & \longrightarrow & [0,1]\\ A & \longmapsto & P_{(Y=y)}(X\in A)\end{array}$$
est un probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$. On l'appelle la *loi conditionnelle de* X *sachant* $(Y=y)$.

Preuve Puisque $A\in\mathscr{A}\mapsto P(X\in A)$ est une probabilité, la probabilité conditionnelle $P_{(Y=y)}$ est une probabilité d'après un résultat du chapitre des espaces probabilisés.

Remarque On pourrait bien entendu définir de manière analogue la *loi conditionnelle de* Y *sachant* $(X=x)$ pour un $x\in X(\Omega)$ tel que $P(X=x)\neq 0$.

Méthode [Donner la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$]

En pratique, si (X,Y) est un couple de variables aléatoires discrètes et $y\in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y)\neq 0$, on donne la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ en donnant les probabilités conditionnelles $P_{(Y=y)}(X=x)$ pour $x\in X(\Omega)$.
Le calcul est possible une fois que l'on connaît la loi conjointe et la seconde loi marginale du couple puisque :

$$\forall x\in X(\Omega),\quad P_{(Y=y)}(X=x)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

Exemple On reprend l'exemple précédent et on calcule, pour $k\geqslant 2$ fixé, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=k)$.

Remarque Pour un couple de variables aléatoires discrètes donné, en considérant les trois objets : loi conjointe, lois marginales et lois conditionnelles, la donnée de deux objets parmi ces trois objets permet de retrouver le dernier.

III. Indépendance

Définition 7 [Variables indépendantes]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Les variables X et Y sont dites *indépendantes* si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Remarque Trouver la loi conjointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes indépendantes est donc immédiat si l'on connaît la loi des variables X et Y.

Proposition 6 [Caractérisation de l'indépendance]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Preuve Admis.

Définition 8 [Variables mutuellement indépendants, cas fini]

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont dites *mutuellement indépendants* si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)$$

Remarques

- Lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté, on se contentera souvent de dire que les variables aléatoires sont indépendantes et non *mutuellement* indépendantes.
- Si des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, il en est de même de toute sous-famille.
- Si des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, elles sont deux à deux indépendantes. La réciproque est fausse.

Définition 9 [Variables mutuellement indépendantes, cas dénombrable]

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites *mutuellement indépendantes* si pour toute partie finie non vide $I \subset \mathbb{N}$ les variables $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Remarque En pratique, il est assez rare de devoir vérifier que des variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes. Ce sont plutôt les conditions de réalisation de l'expérience aléatoire étudiée qui donnent l'indépendance. Par contre, une fois que des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, on se sert très souvent de la définition pour mener des calculs de probabilités.

Exemple On réalise une infinité de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire discrète X_n qui vaut 1 si le $n-$ème lancer a donné *Pile* et 0 sinon.
L'indépendance des lancers nous donne l'indépendance de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires. De plus, pour $N \geqslant 1$, on peut par exemple facilement calculer grâce à l'indépendance des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la probabilité de n'obtenir que des *Pile* aux N premiers lancers puisqu'elle est donnée par :

$$P(X_1 = 1, \ldots, X_N = 1) = P(X_1 = 1) \cdots P(X_N = 1) = \frac{1}{2^N}$$

Le théorème suivant, dont la démonstration est hors-programme, assure l'existence de suites de variables aléatoires discrètes indépendantes dont les lois sont fixées à l'avance.

Théorème 1 [Existence de suites de variables indépendantes]

Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes.
Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que la loi de probabilité de X_n soit L_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque Le théorème précédent est couramment utilisé sans même y faire référence. Par exemple, il justifie un énoncé classique du type : « Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = p \text{ »}$$

Proposition 7 [Indépendance et composition par une fonction]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $f : X(\Omega) \to E_1$ et $g : Y(\Omega) \to E_2$ deux fonctions.
Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

Preuve

IV. Variables aléatoires discrètes réelles

Dans cette partie, sauf mention plus précise, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et réelles, c'est-à-dire qu'elles sont à valeurs dans $E = \mathbb{R}$.

IV. 1. Fonction de répartition

Définition 10 [Fonction de répartition]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.
On appelle *fonction de répartition de* X la fonction :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & P(X \leqslant x) \end{array}$$

PROPOSITION 8 [PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION DE RÉPARTITION]

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et F_X sa fonction de répartition. Alors :

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- On a $\lim_{-\infty} F_X = 0$ et $\lim_{+\infty} F_X = 1$.

PREUVE

REMARQUES

- Lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction de répartition F_X est nulle sur $]-\infty, 0[$ et constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$ pour $n \in \mathbb{N}$. La fonction de répartition permet de retrouver la loi de X en écrivant :

  $$P(X=0) = P(X \leqslant 0) = F_X(0) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = P(X \leqslant n) - P(X \leqslant n-1) = F_X(n) - F_X(n-1)$$

  On peut montrer que la fonction de répartition caractérise la loi de toute variable aléatoire discrète réelle.
- La fonction de répartition est très utilisée pour trouver la loi de variables aléatoires définies par un minimum ou un maximum. En effet, si on se donne par exemple X et Y deux variables aléatoires discrètes et si on pose $S = \max(X, Y)$ et $I = \min(X, Y)$ alors :

  $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_S(t) = P(S \leqslant t) = P(X \leqslant t, Y \leqslant t) \qquad \text{et} \qquad 1 - F_I(t) = P(I > t) = P(X > t, Y > t)$$

EXEMPLE On prend X_1 et X_2 deux variables aléatoires de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et on souhaite déterminer la loi de la variable aléatoire définie par $S = \max(X_1, X_2)$.

IV. 2. Espérance

Définition 11 [Espérance]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.

- **Cas où X(Ω) est fini :** On écrit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$.
  On appelle *espérance de* X et l'on note E(X) le réel :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{N} x_n P(X = x_n)$$

- **Cas où X(Ω) est dénombrable :** On écrit $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
  On dit que X *admet une espérance* ou que X *est d'espérance finie* si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle *espérance de* X et l'on note E(X) le réel :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$$

Remarques

- Dans le cas où X(Ω) est dénombrable et où X est à valeurs positives, la convergence absolue de la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est équivalente à sa convergence.
- Toujours dans le cas où X(Ω) est dénombrable, la définition sous-entend que la convergence et la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a énuméré les éléments de X(Ω). Ceci est une conséquence de la convergence absolue de la série considérée.
- De façon générale, on observe que l'espérance de X ne dépend que de la loi de X. Par conséquent, deux variables aléatoires ayant la même loi ont même espérance.

Proposition 9 [Espérance d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$]

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 1} P(X \geqslant n)$ converge et dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$$

Preuve

PROPOSITION 10 [PROPRIÉTÉS DE L'ESPÉRANCE]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Linéarité :** Si X et Y admettent une espérance alors $\lambda X + Y$ aussi et $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
- **Positivité :** Si X admet une espérance et est à valeurs positives alors $E(X) \geqslant 0$.
  De plus, on a $E(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$ presque sûrement.
- **Croissance :** Si X et Y admettent une espérance et si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

PREUVE La preuve de la linéarité est hors-programme. Pour la positivité, on utilise la fait qu'une somme (finie ou infinie) de termes positifs est positive et nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. Enfin, la croissance découle de la positivité.

PROPOSITION 11 [ESPÉRANCE ET INDÉPENDANCE]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles.
Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes alors la variable XY admet une espérance et :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

PREUVE Admis.

IV. 3. FORMULE DE TRANSFERT

Pour X une variable aléatoire discrète réelle et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction, le théorème suivant, dont la démonstration est hors-programme, montre qu'il n'est pas nécessaire de déterminer la loi de $f(X)$ pour calculer l'espérance de $f(X)$ et que la connaissance de loi de X est suffisante.

THÉORÈME 2 [THÉORÈME DE TRANSFERT]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.

- **Cas où X(Ω) est fini :** On écrit $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_N\}$.
  Pour toute fonction $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, on a :

$$E(f(X)) = \sum_{n=1}^{N} f(x_n)P(X = x_n)$$

- **Cas où X(Ω) est dénombrable :** On écrit $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
  Pour toute fonction $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, la variable $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ converge absolument et dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$$

EXEMPLE On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ dont la loi est donnée par les probabilités $P(X = -1) = 1/9$, $P(X = 0) = 2/9$ et $P(X = 1) = 3/9$. On peut calculer $E(X^2)$ grâce au théorème de transfert ou en déterminant au préalable la loi de X^2.

IV. 4. Moments

Définition 12 [Moments]

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $p \in \mathbb{N}^*$.
On dit que X admet un moment d'ordre p si la variable X^p admet une espérance. Le moment d'ordre p est alors $E(X^p)$.

Remarque Dans le cas où $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$ est fini, X admet un moment d'ordre p qui peut être exprimé grâce au théorème de transfert :

$$E(X^p) = \sum_{n=1}^{N} x_n^p P(X = x_n)$$

Si $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, alors, par théorème de transfert, X admet un moment d'ordre p si et seulement si la série $\sum x_n^p P(X = x_n)$ converge absolument et dans ce cas :

$$E(X^p) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^p P(X = x_n)$$

Proposition 12 [Moment d'ordre 2 implique espérance]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.
Si X admet un moment d'ordre 2, elle admet une espérance.

Preuve

Proposition 13 [Espérance de deux variables admettant un moment d'ordre 2]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles.
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance.

Preuve Admis.

Proposition 14 [Ensemble des variables admettant un moment d'ordre 2]

L'ensemble $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ des variables aléatoires discrètes réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2 est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
En particulier, toute combinaison linéaire de variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2 admet un moment d'ordre 2.

Preuve On montre que $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$. L'ensemble considéré est bien non vide et la stabilité par combinaison linéaire s'obtient en écrivant, pour $X, Y \in L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda X + Y)^2 = \lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2$ et en utilisant la proposition précédente.

IV. 5. Variance

Définition 13 [Variance]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2.
On appelle *variance de* X et on note V(X) le réel :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left[(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\right]$$

Remarques

- Cette définition a un sens puisque si X admet un moment d'ordre 2 alors X^2 admet une espérance et X également par propriété de sorte que l'on peut considérer E(X) et que $(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 = \mathrm{X}^2-2\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{X}+\mathrm{E}(\mathrm{X})^2$ admet bien une espérance.
- Par positivité de l'espérance, la variance est une quantité positive.
- Toute variable X telle que $\mathrm{X}(\Omega)$ est fini admet une variance.

Proposition 15 [Formule de König–Huygens]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2$$

Preuve

Proposition 16 [Transformation affine et variance]

Soient X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Alors la variable $a\mathrm{X}+b$ admet une variance donnée par :

$$\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

Preuve

IV. 6. Covariance

Définition 14 [Covariance]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2.
On appelle *covariance de* X *et* Y et on note Cov(X, Y) le réel :

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{E}\left[(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{Y}))\right]$$

Remarque Cette définition a un sens puisque si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors X, Y et XY admettent une espérance par propriété de sorte que l'on peut considérer $E(X)$ et $E(Y)$ et que $(X-E(X))(Y-E(Y)) = XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)$ admet bien une espérance.

Proposition 17 [Formule de König–Huygens]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Preuve

Proposition 18 [Indépendance et covariance]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Preuve

Remarque La réciproque est fausse. En guise de contre-exemple, on réalise le lancer d'un dé à quatre faces équiprobables numérotées -2, -1, 1 et 2 et on appelle X le résultat obtenu.

Proposition 19 [Propriétés de la covariance]

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Symétrie :** $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
- **Bilinéarité :** $\mathrm{Cov}(\lambda X + Y, Z) = \lambda\,\mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z)$ et $\mathrm{Cov}(X, \lambda Y + Z) = \lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z)$.
- **Positivité :** $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X) \geqslant 0$.

Preuve

Proposition 20 [Variance d'une somme]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. Alors :

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
- Si de plus X et Y sont indépendantes alors : $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Preuve

Remarque Le résultat précédent peut tout à fait être étendu au cadre plus général de $n \geqslant 2$ variables aléatoires discrètes réelles $X_1, \dots, X_n$ admettant des moments d'ordre 2. On a alors :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \;+\; 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Si de plus les variables $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, on a :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

IV. 7. Écart-type et coefficient de corrélation

Définition 15 [Écart-type]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2.
On appelle *écart-type de* X et on note $\sigma(X)$ le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Proposition 21 [Inégalité de Cauchy–Schwarz]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$$

Preuve

Définition 16 [Coefficient de corrélation]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2 et dont les écarts-types sont non nuls, c'est-à-dire que $\sigma(X) \neq 0$ et $\sigma(Y) \neq 0$.
On appelle *coefficient de corrélation de* X *et* Y et on note $\rho(X, Y)$ le réel :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Remarques

- L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne $|\rho(X, Y)| \leqslant 1$.
- Si X et Y sont indépendantes alors $\rho(X, Y) = 0$, la réciproque étant fausse.

V. Variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition 17 [Fonction génératrice]

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On appelle fonction génératrice de X la fonction G_X définie par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\, t^n$$

pour les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la variable t^X admet une espérance.

Remarques

- La seconde égalité de la définition précédente découle du théorème de transfert. On rappelle par ailleurs que ce dernier stipule que la variable t^X admet une espérance si et seulement si la série $\sum P(X = n)\, t^n$ est absolument convergente.
- Si la variable X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut remarquer que sa fonction génératrice G_X est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est polynomiale.
- La fonction génératrice G_X est toujours définie en 1 avec $G_X(1) = 1$.

Proposition 22 [Série entière associée à une fonction génératrice]

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors la série entière $\sum P(X = n)\, t^n$ de la variable réelle a un rayon de convergence au moins égal à 1 et converge normalement sur $[-1, 1]$.

Preuve

Proposition 23 [Domaine de définition et régularité d'une fonction génératrice]

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X. Alors :

- Le domaine de définition de G_X contient $[-1, 1]$.
- La fonction G_X est continue sur $[-1, 1]$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

Preuve

Proposition 24 [La fonction génératrice caractérise la loi]

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.
Alors la loi de la variable X est entièrement déterminée par sa fonction génératrice G_X. Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Preuve

Remarque Par conséquent, deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.

Théorème 3 [Lien entre espérance et fonction génératrice]

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.
Alors X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1 et dans ce cas :

$$E(X) = G_X'(1)$$

Preuve Admis.

Théorème 4 [Lien entre variance et fonction génératrice]

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.
Alors X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas :

$$E(X(X-1)) = G_X''(1)$$

Preuve Admis.

Remarque Par conséquent, si G_X est deux fois dérivable en 1, on a les relations :

$$E(X^2) = G_X''(1) + G_X'(1) \qquad \text{et} \qquad V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$$

Proposition 25 [Fonction génératrice d'une somme de deux variables indépendantes]

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonctions génératrices G_X et G_Y.
Si X et Y sont indépendantes alors, en tout point $t \in \mathbb{R}$ pour lequel $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ sont définis, on a :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

Preuve

VI. Lois usuelles

VI. 1. Loi de Bernoulli

Définition 18 [Loi de Bernoulli]

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $p \in [0,1]$.
On dit que X suit la *loi de Bernoulli de paramètre p* si :

- $X(\Omega) = \{0,1\}$
- $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Remarque [Modélisation] La loi de Bernoulli de paramètre p modélise une expérience aléatoire à deux issues, souvent appelées « succès » et « échec », dont la probabilité de « succès » est p.

Proposition 26 [Espérance, variance et fonction génératrice]

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. En posant $q = 1-p$, on a :

- **Espérance :** $E(X) = p$
- **Variance :** $V(X) = pq$
- **Fonction génératrice :** $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = pt + q$

Preuve

VI. 2. Loi binomiale

Définition 19 [Loi binomiale]

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.
On dit que X suit la *loi binomiale de paramètres n et p* si :

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Remarque [Modélisation] La loi binomiale de paramètres n et p modélise le nombre de succès obtenus lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli de même paramètre p indépendantes.

Proposition 27 [Espérance, variance et fonction génératrice]

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$. En posant $q = 1 - p$, on a :

- **Espérance :** $E(X) = np$
- **Variance :** $V(X) = npq$
- **Fonction génératrice :** $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = (pt + q)^n$

Preuve

VI. 3. Loi uniforme

Définition 20 [Loi uniforme]

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $a \leqslant b$ deux entiers.
On dit que X suit la *loi uniforme sur* $[\![a, b]\!]$ si :

- $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$
- $\forall k \in [\![a, b]\!], \quad P(X = k) = \dfrac{1}{b - a + 1}$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a, b]\!])$.

Remarque [Modélisation] La loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ modélise la situation où l'on choisit « au hasard », c'est-à-dire de façon équiprobable, un entier parmi les entiers de $[\![a, b]\!]$.

Proposition 28 [Espérance, variance et fonction génératrice]

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a, b]\!])$. On a :

- **Espérance :** $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- **Variance :** $V(X) = \dfrac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$
- **Fonction génératrice :** $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \dfrac{1}{b-a+1}(t^a + t^{a+1} + \cdots + t^b)$

Preuve

VI. 4. Loi géométrique

Définition 21 [Loi géométrique]

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $p \in]0,1[$.
On dit que X suit la *loi géométrique de paramètre p* si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Remarque [Modélisation] La loi géométrique de paramètre p modélise le rang du premier succès lors de la réalisation d'une suite d'épreuves de Bernoulli de même paramètre p indépendantes.

Proposition 29 [Espérance, variance et fonction génératrice]

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. En posant $q = 1-p$, on a :

- **Espérance :** X admet une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- **Variance :** X admet une variance et $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$
- **Fonction génératrice :** $\forall t \in \left]-1/q, 1/q\right[, \quad G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$

Preuve

> **Proposition 30** [Caractère sans mémoire de la loi géométrique]
>
> Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
> Alors X est une loi géométrique si et seulement si :
>
> $$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \quad P_{(X>n)}(X > n+k) = P(X > k)$$

Preuve

Remarque L'assertion précédente est appelée *la propriété d'absence de mémoire* de la loi de X. Les lois géométriques sont les seules lois discrètes sur $\mathbb{N}^*$ qui la satisfont. Elle peut se traduire par le fait que la probabilité qu'il n'y ait pas encore eu de succès au temps $n+k$ sachant qu'il n'y en a pas eu avant l'instant n est égale à la probabilité qu'il n'y ait pas encore eu de succès au temps k : la loi oublie ce qu'il s'est passé avant le temps n.

VI. 5. Loi de Poisson

> **Définition 22** [Loi de Poisson]
>
> Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $\lambda > 0$.
> On dit que X suit la *loi de Poisson de paramètre* λ si :
>
> - $X(\Omega) = \mathbb{N}$
> - $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$
>
> On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Proposition 31 [Espérance, variance et fonction génératrice]

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On a :

- **Espérance :** X admet une espérance et $E(X) = \lambda$
- **Variance :** X admet une variance et $V(X) = \lambda$
- **Fonction génératrice :** $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

Preuve Même principe que pour la loi géométrique.

Le résultat qui suit montre que la loi de Poisson est naturellement obtenue comme « limite » de lois binomiales. Cela permettra *a posteriori* de mieux comprendre ce que peut modéliser la loi de Poisson.

Proposition 32 [Approximation de la loi de Poisson par des lois binomiales]

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$ avec $p_n \in [0,1]$.
Si la suite $(np_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\lambda > 0$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Preuve

Remarque [Modélisation] Le résultat précédent s'interprète en disant que la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ peut-être approchée par une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$ telle que :

- le nombre n d'expériences de Bernoulli indépendantes considérées est grand ;
- chaque expérience de Bernoulli a la même probabilité de succès p_n faible, p_n étant calibré pour que la quantité np_n soit proche de λ.

Sous cette approximation, la loi de Poisson modélise donc un nombre de succès sur un grand nombre d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre de succès petit. On dit que la loi de Poisson est la *loi des événements rares.*

Exemple Supposons que l'on souhaite modéliser le nombre d'entrées dans un musée sur une période d'une heure, sachant que l'on constate habituellement une moyenne de 30 visiteurs par heure.

- On peut tout d'abord aborder le problème minute par minute en partant du principe qu'à chaque minute le musée reçoit un visiteur avec probabilité $1/2$ et n'en reçoit pas avec probabilité $1/2$. Le nombre de visiteurs sur une heure est alors une loi binomiale $\mathscr{B}(60, 1/2)$.

- On peut recommencer le raisonnement en raisonnant seconde par seconde afin de rendre le modèle plus réaliste. On obtient alors une loi binomiale $\mathscr{B}(3600, 1/120)$.
- Si l'on souhaite rendre ce modèle plus réaliste encore, on peut raffiner le découpage. La proposition précédente montre qu'« à la limite », nous allons obtenir la loi de Poisson $\mathscr{P}(30)$ qui apparaît alors comme un choix pertinent pour modéliser notre situation.

PROPOSITION 33 [SOMME DE DEUX LOIS DE POISSON INDÉPENDANTES]

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ deux lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
Si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda + \mu)$.

PREUVE

VII. RÉSULTATS ASYMPTOTIQUES

THÉORÈME 5 [INÉGALITÉ DE MARKOV]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.
Si X est positive et admet une espérance alors :

$$\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

PREUVE

THÉORÈME 6 [INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ–TCHEBYCHEV]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

PREUVE

Proposition 34 [Loi faible des grands nombres]

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2.
On suppose que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes deux à deux et de même loi et on note :

$$m = E(X_1), \qquad \sigma = \sigma(X_1) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Alors on a l'estimation : $$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

et en particulier la limite suivante, appelée *loi faible des grands nombres* :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Preuve

Remarque On lance une infinité de fois un dé équilibré à six faces. On définit, pour $n \geqslant 1$, la variable X_n qui vaut 1 si le n−ème lancer a donné un 6 et 0 sinon. Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes deux à deux et de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/6)$ de sorte que $m = 1/6$.
Dans ce contexte, la variable S_n/n représente la fréquence de 6 obtenus au cours des n premiers lancers. Intuitivement, il semble naturel de dire que cette fréquence va se rapprocher de $1/6$ lorsque n devient de plus en plus grand. La loi faible des grands nombres permet de justifier mathématiquement cette idée intuitive puisqu'elle donne la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$