THÉORÈMES TECHNIQUES D'ANALYSE

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et on note $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Théorème 1 [Continuité d'une limite]

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $f\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur I ;
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (ou sur tout segment de I).

Alors f est continue sur I.

Théorème 2 [de la double limite]

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, $f\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et a une extrémité de I. On suppose que :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a ;
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (ou sur un voisinage de a).

Alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la fonction f admet une limite en a et :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \ell_n$$

Théorème 3 [Intégration d'une limite]

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont continues sur $[a,b]$;
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Alors :

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème 4 [Dérivation d'une limite]

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $f,h\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;
- La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec $f'=h$.
De plus, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Théorème 5 [Dérivation d'ordre supérieur d'une limite]

Pour $k \geqslant 1$, soient $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $h_0,\ldots,h_k \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- Pour tout $j \in [\![0,k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers h_j sur I ;
- La suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h_k sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la limite simple $f = h_0$ de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I avec :

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad f^{(j)} = h_j$$

Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Théorème 6 [Continuité d'une somme]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur I.

Théorème 7 [de la double limite]

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et a une extrémité de I. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n admet une limite finie ℓ_n en a ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I (ou sur un voisinage de a).

Alors la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente et :

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

Théorème 8 [Intégration d'une somme]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}([\,a,b\,],\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur $[\,a,b\,]$;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[\,a,b\,]$.

Alors :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème 9 [Dérivation d'une somme]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$$

Théorème 10 [Dérivation d'ordre supérieur d'une somme]

Pour $k \geqslant 1$, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum u_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I avec :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}$$

Théorèmes d'intégration généralisée

Théorème 11 [de convergence dominée]

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues par morceaux sur I et la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I à valeurs réelles telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathrm{I}, \quad \left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \textbf{(Hypothèse de domination)}$$

Alors les fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont intégrables sur I et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n = \int_{\mathrm{I}} f$$

Théorème 12 [d'intégration terme à terme]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues par morceaux et intégrables sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme est continue par morceaux sur I ;
- La série $\sum \left(\int_{\mathrm{I}} |u_n|\right)$ converge.

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et l'on a :

$$\int_{\mathrm{I}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathrm{I}} u_n\right)$$

Intégrales à paramètre

Théorème 13 [de continuité des intégrales à paramètre]

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- Pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est continue sur J ;
- Pour tout $x \in \mathrm{J}$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux sur I ;
- Pour tout segment $[a,b] \subset \mathrm{J}$, il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I à valeurs réelles telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall t \in \mathrm{I}, \quad \left|f(t,x)\right| \leqslant \varphi(t)$$

(Hypothèse de domination sur tout segment)

Alors la fonction $x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur J.

Théorème 14 [de dérivation des intégrales à paramètre]

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- Pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J ;
- Pour tout $x \in \mathrm{J}$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur I ;
- Pour tout $x \in \mathrm{J}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux sur I ;
- Pour tout segment $[a,b] \subset \mathrm{J}$, il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I à valeurs réelles telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall t \in \mathrm{I}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \varphi(t)$$

(Hypothèse de domination sur tout segment)

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et :

$$\forall x \in \mathrm{J}, \quad g'(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 15 [Classe $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètre]

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- Pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J ;
- Pour tout $x \in \mathrm{J}$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(t,x)$ est intégrable sur I ;
- Pour tout $x \in \mathrm{J}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)$ est continue par morceaux sur I ;
- Pour tout segment $[a,b] \subset \mathrm{J}$, il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I à valeurs réelles telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall t \in \mathrm{I}, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\right| \leqslant \varphi(t)$$

(Hypothèse de domination sur tout segment)

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J et, pour $p \in [\![1, k]\!]$, on a :

$$\forall x \in \mathrm{J}, \quad g^{(p)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(t,x)\,\mathrm{d}t$$