FONCTIONS VECTORIELLES

Les fonctions considérées dans la suite sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 1$.

I. Dérivabilité des fonctions vectorielles

I. 1. Définitions et propriétés

Définition 1 [Dérivabilité]

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction.

- Soit $a \in \mathrm{I}$. On dit que f *est dérivable en* a si le taux d'accroissement τ_a de f en a défini sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ par :

$$\tau_a(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

  admet une limite finie dans $\mathbb{R}^n$ lorsque t tend vers a.
  Le cas échéant, cette limite est alors appelée *nombre dérivé de* f *en* a et est notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.
- On dit que f *est dérivable sur* I si elle est dérivable en tout point de I.
  Dans ce cas, la fonction $t \mapsto f'(t)$ définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est appelée la *dérivée de* f.

Notation On notera $\mathscr{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dérivables sur I.

Remarque La limite de la fonction $\tau_a : \mathrm{I} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^n$ est dans le cadre du chapitre sur les espaces vectoriels normés. En particulier, la norme définie sur $\mathbb{R}^n$ n'a pas d'influence sur la valeur de la limite.

Interprétation cinématique

Si $n = 2$ ou $n = 3$ et que la position d'un point matériel M_t dépend du temps, on peut lui associer la fonction :

$$f : t \mapsto \overrightarrow{\mathrm{OM}_t}$$

- L'ensemble des $f(t)$ pour t dans l'intervalle I de définition est la *trajectoire du point* M_t.
- Si la fonction f est dérivable sur I, pour $t_0 \in \mathrm{I}$, le vecteur $f'(t_0)$ est le *vecteur vitesse instantané* du point M_t à l'instant t_0.

Proposition 1 [Dérivabilité et développement limité à l'ordre 1]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $a \in \mathrm{I}$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) La fonction f est dérivable en a et $f'(a) = v$.

(2) Il existe une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim\limits_{t \to a} \varepsilon(t) = 0$ et :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = f(a) + (t - a)v + (t - a)\varepsilon(t)$$

Preuve

Remarque L'assertion **(2)** exprime le fait que f possède un développement limité à l'ordre 1 en a.

Proposition 2 [Dérivabilité implique continuité]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

- Si la fonction f est dérivable en a alors elle continue en a.
- Si la fonction f est dérivable sur I alors elle continue sur I.

Preuve

Remarque La réciproque est fausse.

On rappelle que si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction et si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on appelle *fonctions coordonnées de f dans la base $\mathscr{B}$* les fonctions $f_1, \dots, f_n$ définies sur I et à valeurs réelles vérifiant :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

En particulier, si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, cela donne :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

Proposition 3 [Dérivabilité et fonctions coordonnées]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$. On introduit $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

- La fonction f est dérivable en a si et seulement si chacune des fonctions coordonnées de f est dérivable en a. On a alors dans ce cas :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

- La fonction f est dérivable sur I si et seulement si chacune des fonctions coordonnées de f est dérivable sur I. On a alors dans ce cas :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t) e_i$$

Preuve

Remarque Lorsque $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc, si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est dérivable sur I :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$$

Exemple On définit deux fonctions f et g en posant :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (-\sin t, \cos t) \end{array}$$

On montre que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $f' = g$ et $g' = -f$.

Proposition 4 [Caractérisation des fonctions constantes]

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction.
Alors f est constante sur I si et seulement si elle est dérivable et de dérivée nulle sur I.

Preuve

I. 2. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 5 [Combinaison linéaire]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions, $a \in \mathrm{I}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si f et g sont dérivables en a alors $\lambda f + g$ est dérivable en a et :

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$$

- Si f et g sont dérivables sur I alors $\lambda f + g$ est dérivable sur I et :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$$

Preuve On utilise les fonctions coordonnées et le résultat connu sur les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 6 [Composition par une application linéaire]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire et $a \in \mathrm{I}$.

- Si f est dérivable en a alors $u \circ f$ est dérivable en a et :

$$(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$$

- Si f est dérivable sur I alors $u \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(u \circ f)' = u \circ f'$$

Preuve

Proposition 7 [Application bilinéaire et dérivation]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions, $\mathrm{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire et $a \in \mathrm{I}$.

- Si f et g sont dérivables en a alors $\mathrm{B}(f, g)$ est dérivable en a et :

$$\mathrm{B}(f, g)'(a) = \mathrm{B}(f'(a), g(a)) + \mathrm{B}(f(a), g'(a))$$

- Si f et g sont dérivables sur I alors $\mathrm{B}(f, g)$ est dérivable sur I et :

$$\mathrm{B}(f, g)' = \mathrm{B}(f', g) + \mathrm{B}(f, g')$$

Preuve

Notation Dans le résultat précédent, la notation $B(f,g)$ désigne la fonction $t \mapsto B(f(t), g(t))$.

Applications utiles

- **Dérivation d'une multiplication par une fonction scalaire**
Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions dérivables sur I alors φf est dérivable sur I avec :
$$(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$$
On utilise l'application bilinéaire $B(\alpha, x) = \alpha x$ pour $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
- **Dérivation d'un produit scalaire**
On suppose $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$. Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions dérivables sur I alors $(f|g)$ est dérivable sur I avec :
$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$$
On utilise l'application bilinéaire $B(x, y) = (x|y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
- **Dérivation d'un produit vectoriel**
On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et orientée. Si $f : I \to \mathbb{R}^3$ et $g : I \to \mathbb{R}^3$ sont deux fonctions dérivables sur I alors $f \wedge g$ est dérivable sur I avec :
$$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$$
On utilise l'application bilinéaire $B(x, y) = x \wedge y$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
- **Dérivation d'un déterminant**
Étant donnée une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$, si $f : I \to \mathbb{R}^2$ et $g : I \to \mathbb{R}^2$ sont deux fonctions dérivables sur I alors leur déterminant dans la base $\mathscr{B}$, $\det_{\mathscr{B}}(f, g)$, est dérivable sur I avec :
$$\det_{\mathscr{B}}(f, g)' = \det_{\mathscr{B}}(f', g) + \det_{\mathscr{B}}(f, g')$$
On utilise l'application bilinéaire $B(x, y) = \det_{\mathscr{B}}(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Proposition 8 [Composition de deux fonctions dérivables]

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi : J \to I$ deux fonctions et $\alpha \in J$.

- Si φ est dérivable en α et si f est dérivable en $a = \varphi(\alpha)$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable en α et :
$$(f \circ \varphi)'(\alpha) = \varphi'(\alpha) f'(\varphi(\alpha))$$
- Si φ est dérivable sur J et si f est dérivable sur I alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et :
$$(f \circ \varphi)' = \varphi'(f' \circ \varphi)$$

Preuve

Remarque Dans l'écriture $\varphi'(\alpha) f'(\varphi(\alpha))$, bien remarquer que, à gauche, $\varphi'(\alpha)$ est un scalaire que l'on multiplie, à droite, par le vecteur $f'(\varphi(\alpha))$.

II. Fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^k$

II. 1. Définitions et propriétés

Définition 2 [Dérivée k−ème]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $k \in \mathbb{N}$.
Par récurrence, on pose $f^{(0)} = f$ et, si $k \geqslant 1$, on dit que f est *k fois dérivable sur* I si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I et on note $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

Notation On notera $\mathscr{D}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ k fois dérivables sur I.

Définition 3 [Classes $\mathscr{C}^k$ et $\mathscr{C}^\infty$]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $k \in \mathbb{N}$.
On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I lorsqu'elle est k fois dérivable et que $f^{(k)}$ est continue sur I.
On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

Notation On notera $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de classes $\mathscr{C}^k$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Remarque Si $p \leqslant k$ sont deux entiers naturels, alors $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n) \subset \mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n) \subset \mathscr{C}^p(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$.

Proposition 9 [Classe $\mathscr{C}^k$ et fonctions coordonnées]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On introduit de nouveau $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Alors la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si et seulement si chacune des fonctions coordonnées de f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Preuve

II. 2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

De façon analogue au cas de la dérivabilité, la classe $\mathscr{C}^k$ se comporte bien vis-à-vis des opérations suivantes.

Proposition 10 [Combinaison linéaire]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\forall p \in [\![0, k]\!], \quad (\lambda f + g)^{(p)} = \lambda f^{(p)} + g^{(p)}$$

Preuve On utilise les fonctions coordonnées et le résultat connu sur les fonctions à valeurs réelles.

Remarque Autrement dit, l'ensemble $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ a une structure d'espace vectoriel.

Proposition 11 [Composition par une application linéaire]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors $u \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\forall p \in [\![0, k]\!], \quad (u \circ f)^{(p)} = u \circ f^{(p)}$$

Preuve On utilise les fonctions coordonnées et le résultat connu sur les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 12 [Application bilinéaire et classe $\mathscr{C}^k$, formule de Leibniz]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions, $\mathrm{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors $\mathrm{B}(f, g)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\mathrm{B}(f, g)^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \mathrm{B}(f^{(\ell)}, g^{(k-\ell)})$$

Preuve

PROPOSITION 13 [COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS DÉRIVABLES]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ deux fonctions et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Si φ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J et si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

PREUVE On utilise les fonctions coordonnées et le résultat connu sur les fonctions à valeurs réelles.

II. 3. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ D'UNE FONCTION DE CLASSE $\mathscr{C}^k$

THÉORÈME 1 [THÉORÈME DE TAYLOR-YOUNG]

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors f admet un développement limité à l'ordre k en a donné par :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i + \underset{a}{o}((t-a)^k)$$

REMARQUES

- Le terme $\underset{a}{o}((t-a)^k)$ peut aussi être écrit $(t-a)^k \varepsilon(t)$ pour une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$.
- En pratique, en notant $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$, on peut obtenir un développement limité de f à l'ordre k en a en calculant un développement limité à l'ordre k en a de chaque f_i et en les « recombinant ».

EXEMPLE Par exemple, si $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t) = (f_1(t), f_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, on a à l'ordre 4 en 0 :