ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$−espace vectoriel.

I. Produit scalaire et norme associée

I. 1. Produit scalaire

Définition 1 [Produit scalaire]

On appelle *produit scalaire* sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- **Linéarité à gauche :** $\forall x, y, z \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \varphi(y, z)$.
- **Symétrie :** $\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- **Positivité :** $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geqslant 0$.
- **Caractère défini :** $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Notations Si φ est un produit scalaire et si $x, y \in E$, alors le réel $\varphi(x, y)$ est appelé *le produit scalaire des vecteurs x et y*. On le note $(x|y)$, $\langle x, y\rangle$, $\langle x|y\rangle$ ou encore $x \cdot y$.

Remarques

- Par symétrie, la linéarité à gauche implique la linéarité à droite. Ainsi φ est bilinéaire.
- Le caractère défini est une équivalence, c'est-à-dire que si $x = 0$ alors $\varphi(x, x) = 0$ (par linéarité à gauche ou à droite). De plus, si $x \in E$ vérifie $x \neq 0$ alors $\varphi(x, x) > 0$.

Exemples

- **Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$**

  Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (x_1, \ldots, x_n)$ éléments de $\mathbb{R}^n$, on pose :

  $$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

  Cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ comme on peut facilement le vérifier. Il est appelé *produit scalaire canonique* de $\mathbb{R}^n$.

- **Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$**

  Pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

  $$(A|B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \mathrm{Tr}({}^t AB)$$

  Cette application est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme on peut facilement le vérifier. Il est appelé *produit scalaire canonique* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- **Un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$**

  Pour f et g deux fonctions de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, on pose :

  $$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

  Cette application est un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ comme on peut facilement le vérifier.

PROPOSITION 1 [ESPACE VECTORIEL DES FONCTIONS CONTINUES DE CARRÉ INTÉGRABLE]

Soit E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions réelles continues et de carré intégrable sur un intervalle I.
On introduit l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ suivante :

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \varphi(f,g) = \int_I fg$$

Alors φ est un produit scalaire sur E.

PREUVE Les propriétés d'un produit scalaire se vérifient facilement et découlent de la linéarité, de la positivité et de la nullité des intégrales sur un intervalle quelconque.

DÉFINITION 2 [ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL, ESPACE EUCLIDIEN]

On appelle *espace préhilbertien réel* tout $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'*espace vectoriel euclidien.*

À partir de maintenant, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$.

I. 2. Norme associée à un produit scalaire

Définition 3 [Norme associée à un produit scalaire]

On appelle *norme (euclidienne)* associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{(x|x)} \end{array}$$

Remarque Pour le moment, rien ne dit que la norme euclidienne est une norme. Mais nous y viendrons !

Proposition 2 [Identités de polarisation]

Soient x et y deux éléments de E. On a :

(1) $2(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$

(2) $2(x|y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2$

(3) $4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$

On a également l'*identité du parallélogramme* :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Preuve

Remarques

- L'identité du parallélogramme traduit que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.
- La norme euclidienne est définie à partir du produit scalaire. Réciproquement, les identités de polarisation montrent que, connaissant la norme euclidienne, on retrouve le produit scalaire.

Proposition 3 [Inégalité de Cauchy-Schwarz]

La norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \left|(x|y)\right| \leqslant \|x\|\|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$.

Preuve

Exemples

- Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on a, pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

- Sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire présenté précédemment, on a, pour deux fonctions f et g :

$$\left| \int_a^b f(t) g(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, \mathrm{d}t} \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, \mathrm{d}t}$$

Proposition 4 [La norme euclidienne... est une norme]

La norme euclidienne est une norme sur E.

Preuve

Remarque De plus, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si x et y sont positivement proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \lambda x$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$.
En effet, s'il y a égalité alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, quitte à permuter x et y il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. On a alors $(x|y) = \lambda(x|x) = \|x\| \|y\| = |\lambda| \|x\|^2$. Dès lors, si $x = 0$, $x = 0y$ et sinon, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
Réciproquement, si (à permutation près) $y = \lambda x$ avec $\lambda \geqslant 0$, on a $\|x + y\| = (1 + \lambda)\|x\| = \|x\| + \|\lambda x\| = \|x\| + \|y\|$.

À partir de maintenant, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$ et dont la norme associée est notée $\| \cdot \|$.

II. Orthogonalité

II. 1. Familles orthogonales et orthonormées

Définition 4 [Vecteur normé]

Un vecteur x de E est dit *normé* s'il est de norme 1, c'est-à-dire si $\|x\| = 1$.

Définition 5 [Vecteurs orthogonaux]

On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si $(x|y) = 0$.
On note alors $x \perp y$.

Remarques

- Le produit scalaire étant symétrique, la notion d'orthogonalité l'est aussi, c'est-à-dire que $x \perp y$ si et seulement si $y \perp x$.
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.
- Un vecteur x est orthogonal à lui-même si et seulement si il est nul. En effet :

$$(x|x) = 0 \iff \|x\|^2 = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$$

Exemple Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont orthogonaux deux à deux et normés.

Définition 6 [Famille orthogonale, orthonormée]

Soit $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $\mathscr{F}$ est *orthogonale* si les vecteurs la constituant sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si pour tous $i, j \in \mathrm{I}$ avec $i \neq j$ on a $(x_i|x_j) = 0$.
- On dit que la famille $\mathscr{F}$ est *orthonormée* (ou *orthonormale*) si les vecteurs la constituant sont deux à deux orthogonaux et normés, c'est-à-dire si pour tous $i, j \in \mathrm{I}$ on a $(x_i|x_j) = \delta_{i,j}$.

Notation On rappelle la notation du symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ qui vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.

Proposition 5 [Lien entre orthogonalité et liberté]

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E.
Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Preuve

Remarques

- L'hypothèse de non nullité des vecteurs est importante puisque toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.
- Le résultat est en particulier valable pour une famille orthonormée puisque les vecteurs la constituant sont orthogonaux et non nuls.

Théorème 1 [de Pythagore]

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si l'on a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Preuve

Remarque Ainsi, trois points A, B et C de plan forment un triangle rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2$.

Proposition 6 [Extension du théorème de Pythagore]

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$$

Preuve

Théorème 2 [Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt]

Soit $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E.
Alors il existe une famille orthonormée $\left(f_1, \ldots, f_n\right)$ de vecteurs de E telle que :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p\right) = \mathrm{Vect}\left(f_1, \ldots, f_p\right)$$

Preuve

Remarques

- Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors le résultat $\left(f_1,\dots,f_n\right)$ de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est une base orthonormée de E.
  En effet, elle est libre puisque orthonormée et génératrice puisque $\mathrm{Vect}\left(f_1,\dots,f_n\right)=\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)=\mathrm{E}$.
- L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt présenté dans la preuve est à retenir pour pouvoir l'appliquer. Il se résume ainsi :

$$f_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}\qquad \text{et}\qquad \forall k\geqslant 2,\quad f_k=\frac{e_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}(e_k|f_i)f_i}{\left\|e_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}(e_k|f_i)f_i\right\|}$$

Exemple Sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on définit, pour $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, le produit scalaire $\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0)+\mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1)+\mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2)$.
On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur la famille libre $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)$ pour déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire φ.

II. 2. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 7 [Orthogonal d'un sous-espace vectoriel]

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle *orthogonal de F* l'ensemble de E noté $\mathrm{F}^\perp$ défini par :

$$\mathrm{F}^\perp=\left\{x\in\mathrm{E},\ \forall f\in\mathrm{F},\ (x|f)=0\right\}$$

Exemple L'orthogonal de E est $\{0\}$ et l'orthogonal de $\{0\}$ est E. Autrement dit, $\mathrm{E}^\perp=\{0\}$ et $\{0\}^\perp=\mathrm{E}$.

Proposition 7 [L'orthogonal est un sous-espace vectoriel]

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors $\mathrm{F}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

Proposition 8 [Manipulation des orthogonaux]

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :

(1) Si $F \subset G$ alors $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

(2) $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$

Preuve

II. 3. Bases orthonormées d'un espace euclidien

Dans cette partie, E désigne un espace euclidien de dimension n. Le produit scalaire et la norme associée sont toujours notés $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$.

Définition 8 [Base orthonormée]

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{B}$ est une *base orthonormée* (ou *base orthonormale*) de E si $\mathscr{B}$ est une base de E et si la famille $\mathscr{B}$ est orthonormée.

Proposition 9 [Existence de bases orthonormées]

Tout espace euclidien E admet une base orthonormée.

Preuve Il suffit d'appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une base de E.

Proposition 10 [Coordonnées dans une base orthonormée]

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et x un vecteur de E. Alors :

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i$$

Autrement dit, les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ sont les $((x|e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Preuve

Proposition 11 [Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée]

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et x et y deux vecteurs de E. On suppose que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ et on note X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathscr{B}$. Alors :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t\mathrm{XY} \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = {}^t\mathrm{XX}$$

Preuve

Proposition 12 [Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée]

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est notée $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = (m_{i,j})$. Alors :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad m_{i,j} = (f(e_j)|e_i)$$

Preuve

III. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$ et dont la norme associée est notée $\|\cdot\|$.

III. 1. Supplémentaire orthogonal

Définition 9 [Sous-espaces orthogonaux]

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont *orthogonaux* si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad (x|y) = 0$$

Remarque Si F est un sous-espace vectoriel de E, les sous-espaces vectoriels F et $\mathrm{F}^\perp$ sont orthogonaux.

Proposition 13 [Supplémentaire orthogonal]

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Alors les sous-espaces vectoriels F et $\mathrm{F}^\perp$ sont supplémentaires.
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{F}^\perp$ est appelé le *supplémentaire orthogonal* de F.

Preuve

Remarque Cela n'est pas valable en général si F n'est pas de dimension finie.

Proposition 14 [Dimension du supplémentaire orthogonal en dimension finie]

Soit F un sous-espace vectoriel de E avec E est de dimension finie. Alors :

(1) $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{F}^{\perp} = \dim \mathrm{E}$

(2) $(\mathrm{F}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}$

Preuve .

Remarques

- En dimension finie, le supplémentaire orthogonal d'une droite est un hyperplan, et le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan est une droite.
- En dimension infinie, l'inclusion $\mathrm{F} \subset (\mathrm{F}^{\perp})^{\perp}$ peut être stricte.

Exemples

- Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, on considère une droite D d'équation $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. L'orthogonal $\mathrm{D}^{\perp}$ de D est également une droite, elle est engendrée par le vecteur (a, b), c'est-à-dire que $\mathrm{D}^{\perp} = \mathrm{Vect}((a, b))$.
- Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère un plan P d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. L'orthogonal $\mathrm{P}^{\perp}$ de P est une droite, elle est engendrée par le vecteur (a, b, c), c'est-à-dire que $\mathrm{P}^{\perp} = \mathrm{Vect}((a, b, c))$.

III. 2. Projection orthogonale

On commence par rappeler la définition d'une projection associée à une décomposition en somme directe de E.

Rappel Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

On appelle *projection sur* F *parallèlement à* G l'unique endomorphisme p de E tel que :

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{G}, \quad p(x) = 0$$

DÉFINITION 10 [PROJECTION ORTHOGONALE]

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
On appelle *projection orthogonale sur* F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

VOCABULAIRE ET NOTATION

- L'image d'un vecteur x par la projection orthogonale sur F est appelée *projeté orthogonal de x sur* F.
- On note souvent p_F la projection orthogonale sur F.

REMARQUES

- Cette définition a un sens puisque l'on a bien $E = F \oplus F^{\perp}$ si F est de dimension finie.
- La situation peut être illustrée graphiquement :

PROPOSITION 15 [EXPRESSION DU PROJETÉ ORTHOGONAL]

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, $\mathscr{B} = \big(e_1, \ldots, e_p\big)$ une base orthonormée de F et x un vecteur de E. Le projeté orthogonal de x sur F est donné par :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$$

PREUVE

PROPOSITION 16 [CARACTÉRISATION DU PROJETÉ ORTHOGONAL]

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E engendré par une famille $\big(e_1, \ldots, e_p\big)$, x et y deux vecteurs de E et p_F la projection orthogonale sur F. Alors :

$$y = p_F(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y \in F \\ \forall i \in [\![1, p]\!], \quad (x - y|e_i) = 0 \end{cases}$$

PREUVE

Méthode [Détermination du projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F]

- Si l'on connaît une base orthonormée de F, on utilise directement l'expression du projeté orthogonal.
- Si l'on connaît seulement une famille génératrice $(e_1, \dots, e_p)$ de F, on utilise la caractérisation du projeté orthogonal. D'une part, on a $p_F(x) \in F$ de sorte que l'on peut écrire $p_F(x)$ sous la forme $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$. D'autre part, la traduction des égalités $(x - p_F(x)|e_i) = 0$ pour $i \in [\![1, p]\!]$ donne un système à résoudre permettant de déterminer les $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.

Exemple On munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\forall f, g \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), \quad (f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer le projeté orthogonal de $x : t \mapsto t^2$ sur $F = \mathrm{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$.

Proposition 17 [Inégalité de Bessel]

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F. Alors :

$$\forall x \in E, \quad \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

Preuve

III. 3. Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 11 [Distance à un sous-espace vectoriel]

Soient F une sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E.
On appelle *distance de x à* F la quantité :

$$d(x, F) = \inf_{a \in F} \|x - a\|$$

PROPOSITION 18 [EXPRESSION DE LA DISTANCE GRÂCE AU PROJETÉ ORTHOGONAL]

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, x un vecteur de E et p_{F} la projection orthogonale sur F. Alors la distance $d(x,\mathrm{F})$ de x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_{\mathrm{F}}(x)$. Autrement dit :

$$d(x,\mathrm{F}) = \|x - p_{\mathrm{F}}(x)\|$$

PREUVE

REMARQUES

- Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, la borne inférieure définissant la distance de x à F est donc atteinte, c'est un minimum. Ce n'est pas forcément le cas si F n'est pas de dimension finie.
- La situation peut être illustrée graphiquement.

EXEMPLES

- Soit D une droite vectorielle de E. On écrit $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}(a)$ avec $a \in \mathrm{E}$ non nul. La famille $(a/\|a\|)$ étant une base orthonormée de D, la projection p_{D} est donnée par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad p_{\mathrm{D}}(x) = \frac{(a|x)}{\|a\|^2}\, a$$

  Par conséquent, avec le théorème de Pythagore, on obtient aisément l'expression de la distance d'un vecteur x à la droite D :

$$d(x,\mathrm{D})^2 = \|x - p_{\mathrm{D}}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_{\mathrm{D}}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \frac{(a|x)^2}{\|a\|^2}$$

- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on se donne un point $\mathrm{M} = (x,y,z)$ et une droite D engendrée par un vecteur $u = (a,b,c)$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Alors :

$$d(\mathrm{M},\mathrm{D})^2 = (x^2+y^2+z^2) - \frac{(ax+by+cz)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

- Le calcul de distances dans un espace vectoriel permet de résoudre des problèmes de minimisation. Par exemple, l'étude de la borne inférieure suivante se ramène au calcul d'une distance dans un espace vectoriel E bien choisi et muni d'un produit scalaire adéquat :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$$

III. 4. Formes linéaires sur un espace euclidien

Dans cette section, E est un espace euclidien.

Proposition 19 [Représentation des formes linéaires]

Soit φ une forme linéaire de E.
Alors il existe un unique vecteur $a \in \mathrm{E}$ tel que :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \varphi(x) = (a|x)$$

Preuve

Définition 12 [Vecteur normal à un hyperplan]

Soit H un hyperplan de E.
On appelle *vecteur normal à* H tout vecteur non nul de $\mathrm{H}^{\perp}$.

Proposition 20 [Distance d'un vecteur à un hyperplan]

Soit H un hyperplan de E et u un vecteur normal à H.
La distance d'un vecteur x de E à H est donnée par :

$$d(x, \mathrm{H}) = \frac{|(x|u)|}{\|u\|}$$

Preuve .

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on se donne un point $\mathrm{M} = (x, y, z)$ et un plan P d'équation cartésienne $ax + by + cy = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Alors on a :

$$d(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \frac{|ax + by + cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$