ARCS PARAMÉTRÉS

Les fonctions considérées dans la suite sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 1$.

I. Arcs paramétrés

I. 1. Généralités

Définition 1 [Arc paramétré]

On appelle *arc paramétré* tout couple (I, γ) où I est un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et γ une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$. Le sous-ensemble $\gamma(\mathrm{I})$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé *support* de l'arc paramétré (I, γ).
Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on dit que l'arc (I, γ) est de classe $\mathscr{C}^k$ si la fonction γ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Exemples

- Si l'on définit $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$, l'arc paramétré $([0, 2\pi], \gamma)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et son support est le cercle unité dans le plan $\mathbb{R}^2$.
- Si l'on définit $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (3\cos t, 2\sin t) \in \mathbb{R}^2$, l'arc paramétré $([0, 2\pi], \gamma)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et son support est une ellipse dans le plan $\mathbb{R}^2$.
- On introduit $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$. L'arc paramétré $(\mathbb{R}, \gamma)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et son support est la courbe représentative de la fonction sinus dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Remarque En définissant $\gamma : t \in [0, 4\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$, le support de l'arc paramétré $([0, 4\pi], \gamma)$ est le même que l'arc paramétré précédent : les points du cercle unité sont tous obtenus deux fois.
Pour un arc paramétré (I, γ), un point du support $\gamma(\mathrm{I})$ est dit *simple* s'il est obtenu pour une unique valeur de $t \in \mathrm{I}$; sinon il est dit *multiple*.

Interprétation cinématique

Lors de l'étude du mouvement d'un point matériel mobile sur un intervalle de temps I dont la position à l'instant $t \in \mathrm{I}$ est donnée par $\gamma(t)$, on a à faire à un arc paramétré (I, γ).

- Le support de l'arc (I, γ) est appelé la trajectoire du point matériel.
- Dans ce cas, les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont les *vecteur vitesse* et *vecteur accélération* du point matériel à l'instant $t \in \mathrm{I}$.

I. 2. Points réguliers et singuliers, tangente

Définition 2 [Tangente en un point d'un arc paramétré]

Soient (I, γ) un arc paramétré et $t_0 \in \mathrm{I}$. On note, pour $t \in \mathrm{I}$, $\mathrm{M}_t = \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$.
Si la droite $(\mathrm{M}_{t_0}\mathrm{M}_t)$ admet une position limite lorsque t tend vers t_0, on dit que l'arc paramétré (I, γ) admet une *tangente au point* M_{t_0} *de paramètre* t_0 ; la droite limite est appelée *tangente à l'arc paramétré* (I, γ) *au point de paramètre* t_0.

Remarque Si $t \in \mathrm{I}$, la droite $(\mathrm{M}_{t_0}\mathrm{M}_t)$ est dirigée par le vecteur $\gamma(t) - \gamma(t_0)$ (sous réserve que $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$).

Méthode [Détermination de la tangente pour un arc plan]

On se donne (I,γ) un arc *plan*, c'est-à-dire que (I,γ) est un arc paramétré où $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. Dans ce cadre, on note souvent, pour $t \in I$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, c'est-à-dire que x et y sont les fonctions coordonnées de γ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Dans ce cas, pour déterminer l'éventuelle tangente au point M_{t_0} de paramètre t_0 de l'arc paramétré (I,γ), on peut étudier la limite du coefficient directeur de la droite $(M_{t_0}M_t)$:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$$

Si cette limite est finie ou égale à $\pm\infty$, on peut en déduire l'existence et un vecteur directeur de la tangente à l'arc au point M_{t_0}.

Exemple On reprend l'exemple de $\gamma : t \in [0,2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$. Au point de paramètre $t_0 = 0$, l'arc paramétré admet une tangente dirigée par $(0,1)$ et au point de paramètre $t_0 = \pi/2$, une tangente dirigée par $(1,0)$.

Définition 3 [Point régulier, point singulier]

Soient (I,γ) un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et $t_0 \in I$.
Le point $M_{t_0} = \gamma(t_0)$ de paramètre t_0 de l'arc paramétré (I,γ) est dit *régulier* si $\gamma'(t_0) \neq 0$. Sinon, il est dit *singulier* ou *stationnaire*.
L'arc paramétré (I,γ) est dit *régulier* lorsque tous ses points sont réguliers.

Proposition 1 [Tangente en un point régulier]

Soient (I,γ) un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et $t_0 \in I$.
Si le point $M_{t_0} = \gamma(t_0)$ de paramètre t_0 de l'arc paramétré (I,γ) est régulier alors l'arc paramétré (I,γ) admet pour tangente en ce point la droite passant par M_{t_0} et dirigée par $\gamma'(t_0)$.

Preuve La droite $(M_{t_0}M_t)$ est dirigée par le taux d'accroissement γ en t_0 puisque $\gamma'(t_0) \neq 0$. À la limite, le vecteur directeur devient donc $\gamma'(t_0)$.

Exemple On reprend l'exemple de $\gamma : t \in [0,2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$. Au point de paramètre $t_0 = 0$, l'arc paramétré admet une tangente passant par $(1,0)$ et dirigée par $\gamma'(0) = (0,1)$.

Remarque Dans le plan, on peut obtenir l'équation de la tangente à l'arc (I,γ) en un point régulier $\gamma(t_0)$. En effet, un point $P \in \mathbb{R}^2$ est sur la tangente à l'arc paramétré (I,γ) si et seulement si $P - \gamma(t_0)$ est colinéaire à $\gamma'(t_0)$, c'est-à-dire si et seulement si $\det(P - \gamma(t_0), \gamma'(t_0)) = 0$.

Exemple On reprend l'exemple de $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$. Un point du plan $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est sur la tangente de l'arc paramétré au point de paramètre $t_0 = 0$ ssi $\det((x-1, y), (0, 1)) = 0$, c'est-à-dire ssi $x = 1$.

Proposition 2 [Tangente en un point *a priori* singulier]

Soient (I, γ) un arc paramétré et $t_0 \in I$.
S'il existe, on note p le plus petit entier non nul tel que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$. Dans ce cas, l'arc paramétré (I, γ) admet pour tangente au point $M_{t_0} = \gamma(t_0)$ de paramètre t_0 la droite passant par M_{t_0} et dirigée par $\gamma^{(p)}(t_0)$.

Preuve

Remarque Implicitement, la proposition suppose que γ est de classe $\mathscr{C}^p$.

Dans la suite, nous travaillons sur des *arcs plans*, c'est-à-dire des arcs paramétrés (I, γ) où $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$.

Définition 4 [Point birégulier]

Soient (I, γ) un arc plan de classe $\mathscr{C}^2$ et $t_0 \in I$.
Le point $M_{t_0} = \gamma(t_0)$ de paramètre t_0 de l'arc plan (I, γ) est dit *birégulier* si la famille $(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))$ est libre et constitue donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Définition 5 [Allure locale d'un arc plan]

Soient (I, γ) un arc plan et $t_0 \in I$.
S'ils existent, on note $p < q$ les plus petits entiers non nuls tels que $(\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0))$ soit libre et constitue donc une base de $\mathbb{R}^2$. On note $M_{t_0} = \gamma(t_0)$.

- Si p est impair et q est pair, le point M_{t_0} est un *point ordinaire*;
- Si p est impair et q est impair, le point M_{t_0} est un *point d'inflexion*;
- Si p est pair et q est impair, le point M_{t_0} est un *point de rebroussement de première espèce*;
- Si p est pair et q est pair, le point M_{t_0} est un *point de rebroussement de seconde espèce*.

Exemples La justification des allures de la courbe plane au voisinage de point M_{t_0} de paramètre t_0 se fait en réalisant un développement limité de γ au voisinage de t_0.

- Si $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2$, étude au point $M_0 = \gamma(0)$:

- Si $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (-t^3 + t^4, t^3) \in \mathbb{R}^2$, étude au point $M_0 = \gamma(0)$:

I. 3. Étude des branches infinies

Dans cette sous-partie, nous travaillons toujours sur des *arcs plans*, c'est-à-dire des arcs paramétrés (I, γ) où $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. On notera également, pour $t \in I$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, c'est-à-dire que x et y sont les fonctions coordonnées de γ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Définition 6 [Branche infinie]

Soient (I, γ) un arc plan et $t_0 \in \bar{I}$.
On dit que l'arc plan (I, γ) présente une branche infinie en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \|\gamma(t)\| = +\infty$.

Les différents types de branches infinies sont les suivants :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$, la courbe plane possède une *asymptote verticale d'équation* $x = x_0$.
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$, la courbe plane possède une *asymptote horizontale d'équation* $y = y_0$.
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$:
  - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t)/x(t) = 0$, la courbe plane possède une *branche parabolique de direction* (Ox).
  - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t)/x(t) = \pm\infty$, la courbe plane possède une *branche parabolique de direction* (Oy).
  - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t)/x(t) = a \neq 0$:
    - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$, la courbe plane possède une *branche parabolique de direction* $y = ax$.
    - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = b$, la courbe plane possède une *asymptote d'équation* $y = ax + b$.

Exemple Étude des branches infinies de l'arc paramétré $\gamma : t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \quad x(t) = \frac{t}{t^2 - 1} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t^2}{t - 1}$$

I. 4. Plan d'étude d'une courbe plane

Dans cette sous-partie, nous détaillons la plan d'étude permettant de tracer le support d'un arc plan. On se donne donc (I, γ) où $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ et on note, pour $t \in I$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ où x et y sont les fonctions coordonnées de γ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(1) **Domaine de définition de x et y.**
On commence par recherchercher les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions x et y, on note dans la suite D le domaine trouvé.

(2) **Réduction du domaine d'étude.**
Par des arguments de symétrie ou de périodicité, on essaie de réduire le domaine d'étude.
- Si x et y sont $T-$périodiques, on étudie l'arc sur un intervalle de longueur T inclus dans D.
- Si x et y sont impaires, on restreint l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$ et on fait la symétrie par rapport à l'origine O.
- Si x et y sont paires, on restreint l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$.
- Si x est paire et y impaire, on restreint l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$ et on fait la symétrie par rapport à l'axe (Ox).
- Si x est impaire et y paire, on restreint l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$ et on fait la symétrie par rapport à l'axe (Oy).
- Il est possible de repérer d'autres symétries et d'en tirer le même type de conclusions.

(3) **Tableau de variation de x et y**
On indique, dans un même tableau, les variations des fonctions x et y en étudiant le signe de x' et y'.

(4) **Étude des points stationnaires**
On étudie l'allure de l'arc plan au voisinage des points stationnaires en effectuant un développement limité de l'arc au voisinage de ces points.

(5) **Étude des branches infinies**
Enfin, on détermine les points de l'arc qui présentent une branche infinie et on étudie ces branches infinies en suivant la méthode de la sous-partie précédente.

Exemple [Étude de l'*astroïde*]

On souhaite étudier l'arc plan $(\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(1)

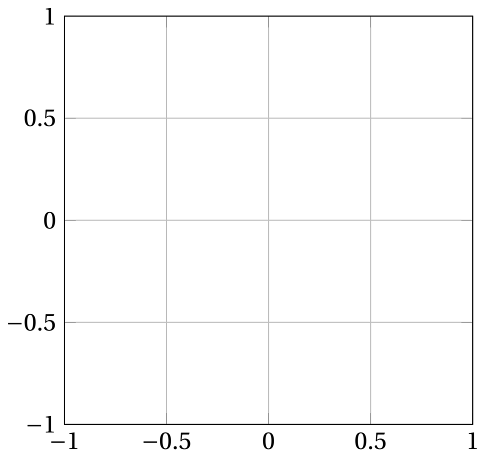
(2)

(3)

(4)

(5)

Le tracé obtenu est le suivant :



I. 5. Longueur d'un arc paramétré

Dans cette sous-partie, on revient à l'étude d'arcs paramétrés (I, γ) avec $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$. La norme euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^n$ est notée $\| \cdot \|_2$.

Définition 7 [Longueur d'un arc paramétré]

Soient (I, γ) un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et $t_1 < t_2$ deux éléments de I.
On appelle longueur de l'arc paramétré $([\, t_1\,,\, t_2\,], \gamma)$ le réel positif :

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t$$

Remarques

- Cette définition permet donc de calculer la longueur d'un arc. Attention toutefois lorsque la paramétrisation n'est pas injective et que l'arc est parcouru plusieurs fois.
- Géométriquement, la distance entre les points $\gamma(t)$ et $\gamma(t+\mathrm{d}t)$ est $\|\gamma'(t)\|_2\,\mathrm{d}t$. En sommant continûment ces distances infinitésimales entre t_1 et t_2, on obtient donc la longueur de l'arc $([t_1, t_2], \gamma)$.
- En termes de cinématique, intégrer la vitesse entre deux instants t_1 et t_2 redonne la distance parcourue sur cet intervalle de temps.

Exemples

- Si $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$, on a :

  Si γ était défini sur $[0, 4\pi]$, on aurait $\mathrm{L} = 4\pi$ (la paramétrisation parcourt le cercle unité deux fois).
- Si $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t) \in \mathbb{R}^2$, on a :

  On obtient ainsi la longueur de l'astroïde.