ESPACES PROBABILISÉS

I. Ensemble dénombrables

Définition 1 [Ensemble dénombrable]

Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il existe une bijection entre cet ensemble et $\mathbb{N}$.

Remarques

- Par définition, un ensemble dénombrable est donc infini. En revanche, la réciproque est fausse puisqu'il existe des ensembles infinis non dénombrables.
- De façon pratique, un ensemble dénombrable E est un ensemble dont on peut énumérer les éléments de façon exhaustive, c'est-à-dire l'écrire sous la forme $E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où les (x_n) sont deux à deux distincts.
  En effet, si $\varphi : E \to \mathbb{N}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E alors $E = \left\{\varphi(n),\ n \in \mathbb{N}\right\}$ par surjectivité de φ est les $(\varphi(n))$ sont distincts deux à deux par injectivité de φ.
- Toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est également dénombrable.

Définition 2 [Ensemble au plus dénombrable]

Un ensemble est dit *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

Remarque Toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est également au plus dénombrable.

Proposition 1 [$\mathbb{Z}$ est dénombrable]

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Preuve On peut expliciter une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ en posant :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{array}$$

Proposition 2 [$\mathbb{N}^2$ est dénombrable]

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Preuve On montre que tout entier n non nul s'écrit de façon unique $n = 2^p(2q+1)$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Ainsi l'application $\varphi : (p,q) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2^p(2q+1) - 1 \in \mathbb{N}$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Remarque Visuellement, on voit qu'il est possible d'énumérer les couples de $\mathbb{N}^2$.

Proposition 3 [Produit cartésien d'ensembles dénombrables]

Soient E et F deux ensembles dénombrables.
Alors $E \times F$ est dénombrable.

Preuve Si $\varphi_E : \mathbb{N} \to E$ et $\varphi_F : \mathbb{N} \to F$ sont deux bijections de $\mathbb{N}$ respectivement vers E et F, on définit l'application suivante $\varphi : (p,q) \in \mathbb{N}^2 \mapsto (\varphi_E(p), \varphi_F(q)) \in E \times F$ qui est une bijection de $\mathbb{N}^2$ vers $E \times F$. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ étant dénombrable, il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ bijective et on a alors $\varphi \circ \psi$ qui réalise une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E \times F$.

Exemples

- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
- Les ensembles $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $[0,1]$ et $\mathbb{R}$ sont infinis non dénombrables.

II. Espaces probabilisés

Le but principal du programme de deuxième année en matière de probabilités est de pouvoir considérer des univers Ω d'expériences aléatoires *infinis*, ce qui permet de s'intéresser à des cas plus riches. Cette généralisation va néanmoins nécessiter quelques adaptations.

Exemple On peut s'intéresser à une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie. L'univers Ω associé à cette expérience, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles, est tout naturellement $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$; il est infini (non dénombrable). Cette expérience n'est pas artificielle, elle permet par exemple de s'intéresser au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir le premier *Pile*; en particulier, on peut s'intéresser à la probabilité de ne jamais obtenir de *Pile*.

II. 1. Tribu

Définition 3 [Tribu]

Soit Ω un ensemble.
Une *tribu* sur Ω est une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant :

(1) $\Omega \in \mathscr{A}$;

(2) Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a $\Omega \backslash A = \overline{A} \in \mathscr{A}$;

(3) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Remarques

- Autrement dit, une tribu est une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ contenant Ω et stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.
- Une tribu peut aussi être appelée une $\sigma-$*algèbre*, d'où la notation $\mathscr{A}$ choisie.

- L'intérêt de cette nouvelle définition sera mise en valeur lorsque la notion de probabilité sera abordée.

Vocabulaire

- Lorsqu'un ensemble Ω est muni d'une tribu $\mathscr{A}$, le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé *espace probabilisable*. L'ensemble Ω est appelé *univers* et les éléments de la tribu $\mathscr{A}$ sont appelés les *événements*.
- Si $A \in \mathscr{A}$ est un événement, $\overline{A} \in \mathscr{A}$ est l'*événement contraire* de A.
- Deux événements A et B de $\mathscr{A}$ sont dits *incompatibles* s'ils sont disjoints, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.

Exemples Soit Ω un ensemble.

- $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu, appelée *tribu grossière*.
- $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu, appelée *tribu complète*.
- Si $A \subset \Omega$, $\mathscr{A} = \left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ est la plus petite tribu sur Ω contenant A.

Proposition 4 [Propriétés de stabilité d'une tribu]

Soient Ω un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. Alors :

- **Appartenance de l'ensemble vide :** $\emptyset \in \mathscr{A}$
- **Stabilité par intersection dénombrable :** Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$, on a :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$$

- **Stabilité par réunion et intersection finies :** Pour tous événements $A_1, \dots, A_n$ de $\mathscr{A}$, on a :

$$A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathscr{A} \qquad \text{et} \qquad A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{A}$$

- **Stabilité par différence :** Pour tous événements A et B de $\mathscr{A}$, on a $B \backslash A \in \mathscr{A}$.

Preuve

II. 2. Probabilité

Définition 4 [Probabilité]

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :

(1) $P(\Omega) = 1$;

(2) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles, la série $\sum P(A_n)$ converge et :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

($\sigma-$*additivité* ou *additivité dénombrable*)

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est alors appelé *espace probabilisé*.

Remarques

- L'ordre de sommation de la série $\sum P(A_n)$ dépend de l'ordre dans lequel ont été énumérés les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$. On peut montrer que la valeur de la somme de cette série est indépendante de l'ordre de sommation choisi.
- En première année, l'ensemble Ω étant fini, l'ensemble des événements était toujours pris égal à $\mathscr{P}(\Omega)$. Dans le cadre plus général de deuxième année où l'ensemble Ω peut être infini, on ne peut plus prendre systématiquement $\mathscr{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements. Le soucis réside dans le fait qu'il n'est pas toujours possible de définir une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ tout entier dans $[0,1]$ vérifiant les propriétés précédentes. Pour contourner ce problème, on s'autorise à définir P sur un sous-ensemble $\mathscr{A}$ plus petit que $\mathscr{P}(\Omega)$ ayant les bonnes propriétés d'une tribu énoncées plus haut.
  Dans la suite, on précisera rarement la tribu $\mathscr{A}$ apposée sur l'ensemble Ω, on partira du principe que tous les événements considérés sont toujours bien dans la tribu $\mathscr{A}$.

Vocabulaire

Dans un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, on se donne $A\in\mathscr{A}$ un événement.

- Si $P(A)=1$, on dit que l'événement A est *presque sûr* ou *presque certain.*
- Si $P(A)=0$, on dit que l'événement A est *négligeable* ou *presque impossible.*

Proposition 5 [Propriétés du calcul des probabilités]

Soit $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé. On a les propriétés suivantes :

- **Probabilité de l'ensemble vide :** $P(\varnothing)=0$.
- **σ−additivité finie :** Pour tous événements $A_1,\dots,A_n$ de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles, on a :

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n)$$

- **Probabilité de la différence :** Pour tous événements A et B de $\mathscr{A}$ vérifiant $A\subset B$, on a :

$$P(B\backslash A)=P(B)-P(A)$$

- **Croissance :** Pour tous événements A et B de $\mathscr{A}$ vérifiant $A\subset B$, on a : $P(A)\leqslant P(B)$.
- **Probabilité de l'événement contraire :** Pour tout événement A de $\mathscr{A}$, on a : $P(\overline{A})=1-P(A)$.
- **Probabilité de l'union de deux événements :** Pour tous événements A et B de $\mathscr{A}$, on a :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Preuve

PROPOSITION 6 [CONTINUITÉ MONOTONE]

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. On a les propriétés suivantes :

- **Continuité croissante :** Pour toute suite croissante d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$, c'est-à-dire pour toute suite d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

- **Continuité décroissante :** Pour toute suite décroissante d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$, c'est-à-dire pour toute suite d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

PREUVE

EXEMPLE On lance une infinité de fois une pièce équilibrée et on considère l'événement A : « Obtenir *Face* à tous les lancers ». Pour déterminer la probabilité de A, on introduit, pour $n \geqslant 1$, les événements A_n : « les n premiers lancers ont donné *Face* » de sorte que $\mathrm{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$. On obtient alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ par continuité décroissante de la probabilité. Autrement dit, la probabilité de ne jamais obtenir de *Pile* est nulle.

PROPOSITION 7 [SOUS-ADDITIVITÉ]

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

- **Cas fini :** Pour tous événements $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ de $\mathscr{A}$, on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n) \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

- **Cas dénombrable :** Pour toute suite d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$ telle que $\sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ converge, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

Preuve

II. 3. Probabilités sur un univers au plus dénombrable

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où Ω est au plus dénombrable. On le munit généralement dans ce cas de la tribu complète $\mathscr{P}(\Omega)$.
Dans ce contexte, une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par son comportement sur les événements dits *élémentaires*, c'est-à-dire les singletons. En effet, si A est une partie de Ω, on peut écrire A sous la forme d'une réunion au plus dénombrable d'événements élémentaires deux à deux incompatibles :

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

de sorte que la propriété de $\sigma-$additivité de P implique :

$$P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\})$$

Proposition 8 [Construction d'une probabilité dans le cas Ω au plus dénombrable]

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable.

- **Cas où Ω est fini :** On écrit $\Omega = \{\omega_1, \dots, w_N\}$ avec $N = \mathrm{Card}(\Omega)$.
  Si $(p_1, \dots, p_N)$ est une famille de N réels positifs vérifiant la relation $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$, alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que :
  $$\forall n \in [\![1, N]\!], \quad P(\{\omega_n\}) = p_n$$
- **Cas où Ω est dénombrable :** On écrit $\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
  Si $\left(p_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\{\omega_n\}) = p_n$$

Preuve Le cas fini a été vu en première année. Le cas dénombrable n'est pas exigible. Pour l'existence, on définit une application P sur $\mathscr{P}(\Omega)$ en posant :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad P(A) = \sum_{n,\ w_n \in A} p_n$$

et on vérifie que P est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ vérifiant la contrainte annoncée. L'unicité est claire d'après la remarque faite dans le préambule de la sous-partie.

Exemple Il existe une unique probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ telle que $P(\{n\}) = 1/2^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En effet :

III. Conditionnement

III. 1. Probabilité conditionnelle

Définition 5 [Probabilité conditionnelle de A sachant B]

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux événements de $\mathscr{A}$ tels que $P(B) \neq 0$.
On appelle *probabilité conditionnelle de* A *sachant* B et l'on note $P_B(A)$ le réel :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Notation La probabilité conditionnelle de A sachant B peut également être notée $P(A|B)$.

Remarque La probabilité conditionnelle de A sachant B « porte bien son nom », c'est-à-dire qu'elle correspond à la probabilité que l'événement A se réalise en prenant pour hypothèse que l'événement B est réalisé. Cela revient à considérer que l'univers n'est plus Ω mais $\Omega \cap B$.

Proposition 9 [Probabilité conditionnelle]

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et B un événement de $\mathscr{A}$ tel que $P(B) \neq 0$.

L'application
$$P_B : \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P_B(A) \end{array}$$

est un probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On l'appelle la *probabilité conditionnelle à l'événement* B.

Preuve

Remarque La probabilité P_B vérifie toutes les propriétés de calcul des probabilités énoncées précédemment.

Théorème 1 [Formule de Bayes]

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux événements de $\mathscr{A}$ tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P_B(A) = P_A(B) \frac{P(A)}{P(B)}$$

Preuve

Remarque La formule de Bayes permet d'« inverser » un conditionnement, c'est-à-dire de passer de $P_B(A)$ à $P_A(B)$.

III. 2. Formule des probabilités composées

Théorème 2 [Formule des probabilités composées]

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et, pour $n \geqslant 2$, $A_1, \ldots, A_n$ des événements de $\mathscr{A}$ vérifiant la condition $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors on a :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \,\cdots\, P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Preuve

Remarque L'hypothèse $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ assure l'existence de toutes les probabilités conditionnelles de la formule des probabilités composées. En effet, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \cdots \cap A_i$ de sorte que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_i) \geqslant P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ et donc $P(A_1 \cap \cdots \cap A_i) \neq 0$.

Exemple On considère une urne contenant n boules rouges et n boules vertes. On effectue dans cette urne n tirages sans remise et on cherche la probabilité de n'obtenir que des boules vertes.

III. 3. Formule des probabilités totales

Définition 6 [Système complet d'événements]

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle *système complet d'événements* toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles dont la réunion vaut Ω, c'est-à-dire que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$$

Remarque Autrement, une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements est un système complet d'événements si elle forme une partition de l'univers Ω.

Exemples

- Si $A \in \mathscr{A}$ est un événement, $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.
- On reprend le cadre d'une suite infinie de lancers d'une pièce. On pose A_0 : « On n'obtient aucun *Pile* » et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n : « On obtient le premier *Pile* au $n-$ème lancer. Alors la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Théorème 3 [Formule des probabilités totales]

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements.
Alors, pour tout événement $B \in \mathscr{A}$, la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n)$$

Preuve

Remarque La formule des probabilités totales peut aussi s'écrire sous sa *forme conditionnelle* :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n)$$

en convenant que $P_{A_n}(B)P(A_n) = 0$ dès que $P(A_n) = 0$, ce qui cohérent puisque dans ce cas $P(A_n \cap B) = 0$ étant donné que $B \cap A_n \subset A_n$.

Exemple On considère des urnes U_n pour $n \geqslant 1$. Pour chaque $n \geqslant 1$, l'urne U_n contient n boules dont une seule est blanche. Le joueur choisit une urne au hasard, l'urne n étant choisie avec probabilité $1/2^n$, puis tire une boule dans cette urne. On cherche la probabilité que le joueur tire une boule blanche.

IV. Indépendance

Définition 7 [Événements indépendants]

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et A, B deux événements de $\mathscr{A}$.
Les événements A et B sont dits *indépendants* si :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Proposition 10 [Caractérisation par les probabilités conditionnelles]

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et A, B deux événements de $\mathscr{A}$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) \neq 0$.
Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}_\mathrm{B}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

Preuve

Définition 8 [Événements mutuellement indépendants, cas fini]

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ des événements de $\mathscr{A}$.
Les événements $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ sont dits *mutuellement indépendants* si pour toute partie non vide $\mathrm{I} \subset [\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$$

Remarques

- Lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté, on se contentera souvent de dire que les événements sont indépendants et non *mutuellement* indépendants.
- La seule relation $\mathrm{P}(\cap_{i=1}^n \mathrm{A}_i) = \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$ ne permet pas de conclure que les événements $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ sont mutuellement indépendants, il faut le vérifier pour toute partie non vide I de $[\![1, n]\!]$.
- Si des événements $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ sont mutuellement indépendants, il en est de même de toute sous-famille.
- Si des événements $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ sont mutuellement indépendants, ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse.
  Par exemple, sur une suite de deux lancers d'une pièce équilibrée, les événements A : « Le premier lancer donne *Pile* », B : « Le second lancer donne *Pile* » et C : « Les deux lancers donnent le même résultat » sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement.

Définition 9 [Événements mutuellement indépendants, cas dénombrable]

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.
Les événements $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dits *mutuellement indépendants* si pour toute partie finie non vide $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$ les événements $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ sont mutuellement indépendants.

Remarque En pratique, il est assez rare de devoir vérifier que des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants. Ce sont plutôt les conditions de réalisation de l'expérience aléatoire étudiée qui donnent l'indépendance. Par exemple, dans le cas d'une suite infinie de lancers d'une pièce, les événements P_n : « Le n−ème lancer donne *Pile* » pour $n \in \mathbb{N}$ sont mutuellement indépendants de par la nature de l'expérience, chaque lancer étant réalisé de façon indépendante des autres. Cette indépendance permet alors, par exemple, de calculer facilement la probabilité de n'obtenir que des *Pile* aux $N \geqslant 1$ premiers lancers puisqu'elle est donnée par :

$$P(P_1 \cap \cdots \cap P_N) = P(P_1)\cdots P(P_N) = \frac{1}{2^N}$$