DEVOIR À LA MAISON N°1

POUR LE VENDREDI 13 SEPTEMBRE 2019

PROBLÈME – MOYENNES PONDÉRÉES DE CESÀRO ET SÉRIES

Dans ce problème, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle ou complexe. À partir de cette dernière, on définit une nouvelle suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$$

Le but du problème est de comparer les natures des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$.

DEUX EXEMPLES

1. Dans cette question, on étudie le cas d'une suite constante. On se donne donc $a \in \mathbb{C}$ et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a$$

1.1. Exprimer le terme a_n^* pour $n \geqslant 0$.

1.2. Donner la nature et la somme en cas de convergence des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$.

2. Dans cette question, on étudie le cas d'une suite géométrique. On se donne donc $q \in \mathbb{C}$ et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = q^n$$

2.1. Exprimer le terme a_n^* en fonction de q et $n \geqslant 0$.

2.2. Pour $|q| < 1$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et donner sa somme en fonction de q.

2.3. Même question pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$ toujours dans le cas $|q| < 1$.

2.4. Pour $|q| \geqslant 1$, donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$.

2.5. Pour $q = -2$, donner la nature et la somme en cas de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$.

2.6. On suppose que $q = e^{i\theta}$ avec $0 < |\theta| < \pi$.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$ est convergente et donner les parties réelle et imaginaire de sa somme.

COMPARAISON DES SUITES $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ET $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe $k \in [\![0, n]\!]$.
Donner un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$ puis la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Pour $q \in \mathbb{N}$ fixé, on introduit :

$$\forall n > q, \quad \mathrm{S}_q(n) = \sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}$$

Déterminer la limite de $\mathrm{S}_q(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ tend également vers 0.
Indication : on pourra revenir à la définition d'une limite.

6. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel ℓ. Montrer que la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

7. La convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$?

Comparaison des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$

Dans cette partie, on utilise les notations suivantes :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n} a_k,\quad \mathrm{T}_n=\sum_{k=0}^{n} a_k^* \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_n=2^n\mathrm{T}_n$$

8. Pour $n\in[\![0,3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, $k\in[\![0,n]\!]$, c'est-à-dire sous la forme :

$$\mathrm{U}_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}\mathrm{S}_k$$

9. Dans cette question, on généralise le résultat de la question précédente à tous les entiers n. On cherche donc, pour tout entier n, à écrire U_n sous la forme :

$$\mathrm{U}_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}\mathrm{S}_k \qquad (\star)$$

9.1. Compte-tenu de la question précédente, conjecturer une expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,n]\!]$.

9.2. Prouver alors la relation $(\star)$ par récurrence sur n.
Indication : on pourra remarquer que $a_k=\mathrm{S}_k-\mathrm{S}_{k-1}$ *pour* $k\in[\![1,n]\!]$.

10. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$ converge et exprimer sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.
Indication : on pourra utiliser la question ***6.*** *avec la suite* $(\mathrm{S}_{n-1})_{n\geqslant 0}$ *et la convention* $\mathrm{S}_{-1}=0$.

11. La convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$?

⋆ ⋆
⋆