DEVOIR À LA MAISON N°2

POUR LE JEUDI 3 OCTOBRE 2019

PROBLÈME – ENDOMORPHISMES CYCLIQUES

Dans ce problème, E désigne un $\mathbb{C}-$espace vectoriel et on notera id_{E} l'application identité de E.
On dit qu'un endomorphisme u de E est *cyclique* s'il existe un entier naturel non nul $p \geqslant 1$ et un vecteur $x_0 \in \mathrm{E}$ vérifiant :

$$\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$$

De plus, si $\lambda \in \mathbb{C}$, on dit que λ est *valeur propre de u* s'il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ non nul vérifiant $u(x) = \lambda x$. Le vecteur x est appelé *vecteur propre de u associé à la valeur propre* λ.

ÉTUDE DE DEUX EXEMPLES

Dans cette partie, on suppose E de dimension 3 et on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

1. On considère l'endomorphisme u dont la matrice associée dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

1.1. Exprimer $u(e_1)$ et $u^2(e_1)$ dans la base $\mathscr{B}$ et en déduire que u est cyclique.

1.2. Montrer que u admet trois valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et donner des vecteurs propres x_1, x_2 et x_3 associés.

1.3. Justifier que (x_1, x_2, x_3) est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

1.4. Donner une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit une matrice diagonale.

2. On considère désormais l'endomorphisme u dont la matrice associée dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1. Exprimer $u(e_1)$ et $u^2(e_1)$ dans la base $\mathscr{B}$ et en déduire que u est cyclique.

2.2. Déterminer les valeurs propres de u.

CAS GÉNÉRAL

Dans cette partie, on suppose E de dimension n et on considère un endomorphisme u de E cyclique. Il existe donc par définition un entier naturel non nul $p \geqslant 1$ et un vecteur $x_0 \in \mathrm{E}$ vérifiant $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$.

3. Montrer que $n \leqslant p$.

4. On note m le plus grand des entiers naturels k non nuls tels que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0))$ est libre.

4.1. Montrer que $u^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, u(x_0), \dots, u^{m-1}(x_0)$.

4.2. Prouver par récurrence que, pour tout entier k supérieur ou égal à m, le vecteur $u^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, u(x_0), \dots, u^{m-1}(x_0)$.

4.3. En déduire que $m = n$ et que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

5. Justifier qu'il existe des nombres complexes $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que :

$$u^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(x_0)$$

6. Dans la suite, on note g l'endomorphisme de E défini par :

$$g = u^n - a_{n-1} u^{n-1} - \cdots - a_1 u - a_0 \mathrm{id}_E$$

6.1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $g(u^k(x_0)) = 0$.

6.2. En déduire $u^n - a_{n-1} u^{n-1} - \cdots - a_1 u - a_0 \mathrm{id}_E = 0$.
On pourra utiliser la base de E *donnée par la question* ***4.3.***.

6.3. Donner la matrice de u dans la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Commutant d'un endomorphisme cyclique

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie précédente. On appelle *commutant de* u, noté $\mathscr{C}(u)$, l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u, c'est-à-dire que :

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E),\ v \circ u = u \circ v\}$$

7. Justifier que $\mathscr{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

8. On se donne v et w deux éléments de $\mathscr{C}(u)$ qui vérifient $v(x_0) = w(x_0)$. Montrer que $v = w$.
On pourra commencer par montrer que $v(u^k(x_0)) = w(u^k(x_0))$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.

9. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

9.1. Justifier qu'il existe des complexes $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ tels que :

$$v(x_0) = b_0 x_0 + b_1 u(x_0) + \cdots + b_{n-1} u^{n-1}(x_0)$$

9.2. Si on suppose $v \in \mathscr{C}(u)$, montrer que $v = b_0 \mathrm{Id}_E + b_1 u + \cdots + b_{n-1} u^{n-1}$.
On pourra appliquer la question ***8.*** *avec un endomorphisme* w *bien choisi.*

9.3. En déduire que $\mathscr{C}(u)$ est de dimension n et que $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ en est une base.

Endomorphismes nilpotents cycliques

Dans cette partie, on considère un endomorphisme u de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$, c'est-à-dire que l'endomorphisme u vérifie $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

10. Puisque $u^{p-1} \neq 0$, soit $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$. Justifier que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

11. En déduire que $p \leqslant n$ et que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

Une application

On travaille dans cette partie dans le $\mathbb{R}$−espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \geqslant 0$ en définissant :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \quad \text{et} \quad D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

12. Vérifier que Δ et D sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

13. Justifier que $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$ et que $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

14. Prouver que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta^k(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-k}[X]$. En déduire Δ^{n+1} puis le fait que Δ est cyclique.

15. Montrer que $D \in \mathscr{C}(\Delta)$ et en déduire qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ uniques tels que :

$$D = a_0 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} + a_1 \Delta + \cdots + a_n \Delta^n$$