DEVOIR À LA MAISON N°3

POUR LE LUNDI 4 NOVEMBRE 2019

PROBLÈME – ÉTUDE DE L'ENSEMBLE DES MATRICES NILPOTENTES

Dans ce problème, on considère un entier $n \geqslant 2$ et on travaille dans l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on désigne par $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.
On rappelle qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* si ${}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}$, *antisymétrique* si ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$ et que l'on note respectivement $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\mathrm{M}^p = 0$. On introduit $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on se propose d'étudier quelques propriétés de l'ensemble $\mathscr{N}$.

QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

1. Pour $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4$, démontrer que :

$$\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = \begin{cases} \mathrm{E}_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On demande une preuve rigoureuse de ce résultat.

2. Sans justification, rappeler la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base.

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DE $\mathscr{N}$

Dans cette partie, on fixe $\mathrm{A} \in \mathscr{N}$ une matrice nilpotente.

3. La matrice A est-elle inversible ? Justifier la réponse.

4. Déterminer le spectre sp(A) de A et donner son polynôme caractéristique χ_A.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

6. Montrer que ${}^t\mathrm{A} \in \mathscr{N}$.

7. Prouver que si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à A alors $\mathrm{M} \in \mathscr{N}$.

8. Démontrer que $\mathrm{A}^n = 0$.

9. En déduire que $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{M}^n = 0$.

10. Justifier que A est trigonalisable et donner le rang maximal de A.

11. On se donne B et C deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

11.1. On suppose $\mathrm{BC} \in \mathscr{N}$, montrer que $\mathrm{CB} \in \mathscr{N}$.

11.2. Avec les hypothèses $\mathrm{B} \in \mathscr{N}$ et $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$, prouver que $\mathrm{AB} \in \mathscr{N}$ et $\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathscr{N}$.

12. **Question pour les 5/2 uniquement –** Montrer que si A est en plus supposée symétrique alors $\mathrm{A} = 0$.
Les 3/2 admettent ce résultat et peuvent s'en servir librement dans la suite .

13. On suppose dans cette question que A est antisymétrique.

13.1. Prouver que $A^2 = 0$.
On remarquera en le justifiant que ${}^t AA$ *est une matrice symétrique.*

13.2. En déduire toutes les matrices antisymétriques appartenant à $\mathcal{N}$.
On pourra exprimer la trace de A^2 *en fonction des coefficients de* A.

Exemples

14. Dans cette question, on étudie la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

14.1. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de la matrice M.

14.2. On pose $S = {}^t M + M$. A-t-on $S \in \mathcal{N}$?
Montrer que $S^2 \in \mathrm{Vect}(I_n, S)$. Déterminer alors les valeurs propres et espaces propres de S.

14.3. L'ensemble $\mathcal{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

15. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

15.1. On se donne $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.
En déduire que M est diagonalisable ou nilpotente.

15.2. Déterminer une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la diagonale n'est pas identiquement nulle.

15.3. En déduire l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{N}$

Dans cette partie, on introduit T_0 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle et $V = \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble $\mathcal{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{N}$.

16. Justifier que T_0 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.

17. Prouver que $\mathcal{N}$ puis V sont inclus dans T_0.

18. Pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, on pose $F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}$ et $G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$.

18.1. Pour $j \in [\![2, n]\!]$, calculer F_j^2.

18.2. Montrer que $G_j \in V$ pour $j \in [\![2, n]\!]$.

18.3. On introduit $\mathcal{G}$ la famille constituée des matrices $E_{i,j}$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et des matrices G_k pour $k \in [\![2, n]\!]$.
Montrer que la famille $\mathcal{G}$ est libre.

18.4. En déduire $V = T_0$.

Sous-espaces vectoriels de dimension maximale contenu dans $\mathcal{N}$

Dans cette partie, on introduit T_1 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la diagonale est nulle.

19. Justifier que T_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.

20. À l'aide de la première partie, montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de T_1.

21. Démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus T_1$.

22. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ dont la dimension est notée d.

22.1. On suppose que $d > \frac{n(n-1)}{2}$.
Montrer que $\dim(F \cap S_n(\mathbb{R})) > 0$ et conclure.

22.2. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$?
Donner un exemple d'un tel sous-espace.