DEVOIR À LA MAISON N°4

POUR LE JEUDI 28 NOVEMBRE 2019

PROBLÈME – ÉTUDE D'UNE NORME MATRICIELLE

Dans ce problème, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et on travaille dans le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ donnée de coefficients notés $(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on pose :

$$\|\mathrm{M}\| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$$

De plus, si $\mathrm{sp}(\mathrm{M})$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes de M, on appelle *rayon spectral* de M le réel noté $\rho(\mathrm{M})$ et défini par :

$$\rho(\mathrm{M}) = \max_{\lambda\in\mathrm{sp}(\mathrm{M})} |\lambda|$$

PARTIE I

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Étudier si l'application ρ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$.
On dit alors que la norme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative.

4. On fixe une matrice $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on se donne $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ. Les coordonnées du vecteur X sont notées $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

4.1. Démontrer que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j$$

4.2. Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ un indice pour lequel $|x_{i_0}| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$. Montrer que :

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |m_{i_0,j}|$$

4.3. En déduire que $\rho(\mathrm{M}) \leqslant \|\mathrm{M}\|$.

4.4. Donner un exemple de matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\rho(\mathrm{M}) = \|\mathrm{M}\|$.

4.5. On suppose que $\mathrm{M} \neq 0$ et que M est *nilpotente*, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $\mathrm{M}^p = 0$. Montrer que $\rho(\mathrm{M}) < \|\mathrm{M}\|$.

5. On se donne une matrice $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

5.1. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(\mathrm{M}^k) = \rho(\mathrm{M})^k$.
On pourra trigonaliser la matrice M.

5.2. On suppose que la suite matricielle $(\mathrm{M}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice nulle lorsque k tend vers l'infini.
Montrer que $\rho(\mathrm{M}) < 1$.

6. Soient $(\mathrm{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible.
Montrer que la suite $(\mathrm{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si la suite $(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}_k\mathrm{P})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.

PARTIE II

Dans cette partie, on se donne α et β deux nombres réels et on étudie la matrice $A_n(\alpha,\beta) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

7. **Question pour les 5/2 uniquement –** Justifier que les valeurs propres de la matrice $A_n(\alpha,\beta)$ sont réelles.
   Les 3/2 admettent ce résultat et peuvent s'en servir librement dans la suite .

8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Démontrer que :

$$|\lambda| \leqslant |\alpha| + 2\left|\beta\right|$$

9. Prouver que, pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$, il existe un réel $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$.

Soit χ_n le polynôme caractéristique de la matrice $A_n(0,1)$. On pose $U_n(X) = \chi_n(2X)$.

8. Pour $n \geqslant 3$, donner une relation entre χ_n, χ_{n-1} et χ_{n-2} et en déduire une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.

9. En raisonnant par récurrence, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in]0,\pi[, \quad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

10. En déduire que le spectre de la matrice $A_n(0,1)$ est donné par :

$$\mathrm{sp}(A_n(0,1)) = \left\{2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k \in [\![1,n]\!]\right\}$$

    Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des espaces propres associés.

Dans la suite de cette partie, on fixe $k \in [\![1,n]\!]$ et on pose $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$.

11. On se donne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos\theta_k$. Les coordonnées du vecteur X sont notées $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Montrer que :

$$\begin{cases} -2\cos\theta_k x_1 + x_2 = 0 & \\ x_{i-1} - 2\cos\theta_k x_i + x_{i+1} = 0 & \forall i \in [\![2,n-1]\!] \\ x_{n-1} - 2\cos\theta_k x_n = 0 & \end{cases}$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad u_{i-1} - 2\cos\theta_k u_i + u_{i+1} = 0$$

12. Justifier que E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et préciser sa dimension.

13. Déterminer l'ensemble des suites $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de E qui vérifient $u_0 = u_{n+1} = 0$.

14. En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos\theta_k$.

15. En déduire, pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, les valeurs propres et les espaces propres associés de la matrice $A_n(\alpha,\beta)$.