DEVOIR À LA MAISON N°5

POUR LE LUNDI 9 DÉCEMBRE 2019

L'exercice 4 et le problème sont facultatifs.

EXERCICE 1 – ÉTUDE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

Pour tout entier $n > 0$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x > 0, \quad f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}$$

1. Démontrer que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction f à expliciter.
2. Étudier l'éventuelle convergence uniforme de $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour $n > 0$, faire une étude de variations de la fonction $\varphi_n : x \mapsto f_n(x) - f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. On fixe $a > 0$. Prouver que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[\,a, +\infty\,[$.

EXERCICE 2 – ÉTUDE D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS

On cherche à étudier la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans la suite, on peut utiliser librement l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

1. Démontrer que la série de fonctions étudiée converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Dans la suite, on note S sa somme, c'est-à-dire que :
   $$\forall x > 0, \quad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$
2. Prouver que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour $x > 0$, établir une relation entre $\mathrm{S}(x+1)$ et $\mathrm{S}(x)$.
4. En déduire un équivalent de S en 0.
5. Montrer que $x\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$ et en déduire un équivalent de S en $+\infty$.
6. Dresser le tableau de variations de S.

EXERCICE 3 – ÉTUDE D'UNE LIMITE

Justifier l'existence et donner la valeur de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx+\sin x}{n+x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4 ★ – Étude d'une série de fonctions avec paramètre

Pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction $f_{n,\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_{n,\alpha}(x) = \frac{x^\alpha}{x^2+n^2}$$

Déterminer l'ensemble des réels $\alpha \geqslant 0$ tels que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_{n,\alpha}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Problème ★ – Exponentielle de matrices

Dans le problème, n désigne un entier naturel non nul. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit, lorsque cette limite existe, la matrice $E(A)$ par :

$$E(A) = \lim_{p\to+\infty}\left(I_n + \frac{1}{p}A\right)^p$$

I. Préliminaires

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, donner le module et un argument de $\left(1+\frac{z}{p}\right)^p$ en fonction de a, b et p.

2. En déduire que : $\lim_{p\to+\infty}\left(1+\frac{z}{p}\right)^p = e^z$.

II. Exponentielle de matrices diagonalisables

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

- **3.1.** Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_n(\mathbb{K})$.
- **3.2.** Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales, montrer que $E(A+B)$ existe avec $E(A+B) = E(A)E(B)$.
  A-t-on $E(A)E(B) = E(B)E(A)$?

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

- **4.1.** Montrer que $E(A)$ existe.
- **4.2.** Établir que $\det(E(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
- **4.3.** On fixe $x \in \mathbb{K}$. Montrer que $E(xI_n + A)$ existe avec $E(xI_n + A) = e^x E(A)$.

5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables qui commutent.

- **5.1.** Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.
  On pourra raisonner sur les endomorphismes u_A et u_B canoniquement associés à A et B et étudier les restrictions de u_A aux sous-espaces propres de u_B.
- **5.2.** En déduire que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.