DEVOIR À LA MAISON N°6

POUR LE LUNDI 6 JANVIER 2020

Le problème 2 est facultatif.

PROBLÈME 1 – ÉTUDE DE FAMILLES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout le problème, a est un paramètre réel.

PARTIE I

Dans cette partie, on étudie l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_a : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X) \end{array}$$

1. Montrer que Φ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Écrire la matrice M_a de Φ_a dans la base canonique $(1, X, X^2, X^2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Dans cette question, on étudie la cas particulier $a = -4$.

3.1. La matrice $M_{-4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

3.2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ_{-4}.

4. Dans cette question, on étudie les valeurs propres de Φ_a.

4.1. Déterminer en fonction du réel a les valeurs propres de Φ_a.

4.2. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme Φ_a admet-il des valeurs propres doubles ?

4.3. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle Φ_a admet une valeur propre triple ?

5. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme Φ_a est-il diagonalisable ?

6. Donner les valeurs de a pour lesquelles on a $\deg(\Phi_a(P)) = \deg(P)$ pour tout polynôme P non constant de $\mathbb{R}_3[X]$.

7. Dans cette question, on suppose que $a \notin \{-2, -1, 0\}$.

7.1. Donner une base de $\mathrm{Ker}(\Phi_a)$.

7.2. Montrer que $(-1 + aX, X^2, X^3)$ est une base de $\mathrm{Im}(\Phi_a)$.

7.3. Donner en fonction de $p \in [\![0, 3]\!]$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant l'équation :

$$X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X) = X^p$$

PARTIE II

Dans cette partie, pour $n \geqslant 2$, on étudie l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{a,n} : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X) \end{array}$$

8. Justifier rapidement que $\Phi_{a,n}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

9. Écrire la matrice $M_{a,n}$ de $\Phi_{a,n}$ dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

10. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $\Phi_{a,n}$ si et seulement si il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $\lambda = k(a+k-1)$.

11. Montrer que si $a > 0$, l'endomorphisme $\Phi_{a,n}$ est diagonalisable.
L'endomorphisme $\Phi_{0,n}$ est-il diagonalisable ?

Partie III

Dans cette partie, on introduit E le $\mathbb{R}$−espace vectoriel des fonctions définies sur $]-1,1[$ et à valeurs réelles qui sont somme d'une série entière sur $]-1,1[$. Ainsi, une fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est dans E s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant 1$ telle que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

12. Montrer que si $f \in E$ alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

On étudie alors dans la suite l'application :

$$\Delta_a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \Delta_a(f) \end{array}$$

où $\Delta_a(f)$ est la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \Delta_a(f)(x) = x(x+1)f''(x) + (ax-1)f'(x)$$

13. Justifier que Δ_a est un endomorphisme de E. En particulier, on démontrera précisément que $\Delta_a(f) \in E$ si $f \in E$.

14. Dans cette question, on se donne $f \in E$ telle que $\Delta_a(f) = af$. On pose :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

14.1. Établir que : $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n-1)((n+a)a_n + (n+1)a_{n+1}) = 0$$

14.2. Prouver que : $$\forall n \geqslant 3, \quad a_n = \frac{2(-1)^n}{n!}\left(\prod_{k=2}^{n-1}(k+a)\right)a_2$$

14.3. Dans le cas particulier où $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, donner les valeurs de a pour lesquelles la série entière est un polynôme ; on déterminera alors son degré et son coefficient dominant en fonction de a.

14.4. Déterminer, selon $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

15. En déduire l'ensemble des solutions dans E de l'équation $\Delta_a(f) = af$.

16. Comparer, selon $a \in \mathbb{R}$, les dimensions des sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\Phi_{a,n} - a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ et $\mathrm{Ker}(\Delta_a - a\mathrm{Id}_E)$.

Problème 2 ★ – Approximation uniforme de fonctions continues

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on désigne par $P_{k,n}$ les fonctions polynomiales de degré n définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad P_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Partie I

1. Soit $x \in [0,1]$. Démontrer les relations suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x) = 1$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP_{k,n}(x) = nx$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P_{k,n}(x) = n(n-1)x^2$

2. En déduire, toujours pour $x \in [0,1]$, que :

$$\textbf{(D)} \qquad \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \mathrm{P}_{k,n}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

Partie II

On fixe $x \in [0,1]$. Le but de cette partie est de majorer la somme suivante :

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \mathrm{P}_{k,n}(x)$$

Pour ce faire, on introduit les ensembles :

$$\mathrm{V} = \left\{ k \in [\![0,n]\!],\ \left| x - \frac{k}{n} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{W} = \left\{ k \in [\![0,n]\!],\ \left| x - \frac{k}{n} \right| > \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$$

et les quantités :

$$\mathrm{S}_\mathrm{V}(x) = \sum_{k \in \mathrm{V}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \mathrm{P}_{k,n}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_\mathrm{W}(x) = \sum_{k \in \mathrm{W}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \mathrm{P}_{k,n}(x)$$

3. Prouver que : $\mathrm{S}_\mathrm{V}(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

4. Démontrer que : $\mathrm{S}_\mathrm{W}(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$

5. En déduire finalement la majoration : $\mathrm{S}(x) \leqslant \dfrac{5}{4\sqrt{n}}$

Partie III

Dans cette partie, on note $\mathscr{C}$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles muni de la norme de la convergence uniforme, notée $\|\cdot\|_\infty$:

$$\forall f \in \mathscr{C}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

Pour $f \in \mathscr{C}$ et $n \geqslant 1$, on définit une fonction polynomiale sur $[0,1]$, notée $\mathrm{B}_n(f)$, en posant :

$$\forall x \in [0,1], \quad \mathrm{B}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{P}_{k,n}(x)$$

Nous allons prouver, sous différentes hypothèses sur la fonction f, que la suite de fonctions polynomiales $(\mathrm{B}_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Pour ce faire, on étudie la suite $\left(\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et on montre qu'elle tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ en la majorant.

6. Si $f(x) = x^2$ pour $x \in [0,1]$, déterminer, pour $n \geqslant 1$, l'expression de $\mathrm{B}_n(f)$ et calculer $\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty$.

7. Soit $f \in \mathscr{C}$. Démontrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \mathrm{B}_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathrm{P}_{k,n}(x)$$

8. Montrer que si $f \in \mathscr{C}$ est $\delta-$lipschitzienne, on a l'estimation :

$$\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{5\delta}{4\sqrt{n}}$$

9. En déduire que si $f \in \mathscr{C}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}$$

10. Enfin, si $f \in \mathscr{C}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, démontrer avec la formule de Taylor avec reste intégral que l'on a :

$$\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{8n}$$

Est-il possible d'obtenir une meilleure majoration ?