DEVOIR À LA MAISON N°7

Pour le jeudi 6 février

La partie II du problème est facultative.

Exercice

On considère le système différentiel (S) suivant :

$$\begin{cases} x_1'' = -2x_1 + x_2 \\ x_2'' = x_1 - 2x_2 \end{cases} \tag{S}$$

où $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont les deux fonctions inconnues que l'on souhaite déterminer.
Pour ce faire, on définit une fonction $\mathrm{X} : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ et une matrice $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ en posant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$$

1. Déterminer une matrice $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que le système différentiel (S) soit équivalent au système différentiel du premier ordre $\mathrm{X}' = \mathrm{BX}$.
2. Déterminer les valeurs propres de B sur $\mathbb{C}$ ainsi que ses espaces propres.
En déduire que B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et donner une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ dont la première ligne ne comporte que des 1 et vérifiant $\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
3. Résoudre le système différentiel du premier ordre $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$.
4. Trouver les fonctions $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ solutions du système différentiel (S) et vérifiant les conditions initiales $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0$.

Problème

Partie I

1. On commence par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_0^1 e^{-ts}\,\mathrm{d}s$$

   1.1. Exprimer $f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   1.2. Prouver que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
   1.3. Montrer que f est développable en série entière et donner son développement ainsi que le rayon de convergence associé.

2. On introduit ensuite la fonction S définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   2.1. Justifier que la fonction S est développable en série entière et donner son développement ainsi que le rayon de convergence associé.

2.2. Établir l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

3. On poursuit l'étude en définissant sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction R par :

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{R}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

3.1. Justifier que la fonction R est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.2. On pose $\gamma = \mathrm{S}(1) - \mathrm{R}(1)$. Par intégration par parties, démontrer que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

3.3. Prouver que R est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer R' sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.4. Justifier que : $\qquad \forall x > 0, \quad \mathrm{S}(x) = \mathrm{R}(x) + \ln x + \gamma$

4. On introduit désormais les fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et g sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \geqslant 1, \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

4.1. Justifier que g est bien définie sur $]\,0,1\,[$.

4.2. Par comparaison série – intégrale, montrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in\,]\,0,1\,[, \quad 0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \frac{x^n}{n}$$

4.3. Prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $]\,0,1\,[$.

4.4. Montrer que les fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.5. Justifier que : $\qquad \forall x \in\,]\,0,1\,[, \quad g(x) = -\ln(1-x) - \mathrm{R}(-\ln x)$

4.6. En remarquant, après l'avoir justifié, que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(1)$, montrer que :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

5. Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant, pour $x > 0$, la quantité $\mathrm{R}(ax) - \mathrm{R}(bx)$, justifier la convergence de l'intégrale suivante et la calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$$

6. On s'intéresse à l'intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction R.

6.1. Prouver que $\mathrm{R}(x) \leqslant e^{-x}/x$ pour $x > 0$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{R}(x) = 0$.

6.2. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que R est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{R}(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Partie II ⋆

Dans cette partie, on introduit le $\mathbb{R}$−espace vectoriel normé E des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie définie par :

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$$

7. Soit $g \in \mathrm{E}$. Montrer que la solution générale de l'équation différentielle $y' - y + g = 0$ est de la forme :

$$y : x \in \mathbb{R} \longmapsto ke^x + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{R}$$

8. Pour $g \in \mathrm{E}$, on définit la fonction $\mathrm{T}_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} g(x+t)\,\mathrm{d}t$$

8.1. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_g(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} g(u)\,\mathrm{d}u$$

8.2. Justifier que T_g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner T_g' en fonction de T_g et g.

8.3. En supposant g non nulle, déterminer s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{T}_g = \lambda g$.

8.4. Montrer que T_g est bornée sur $\mathbb{R}$ et majorer $\|\mathrm{T}_g\|_\infty$ en fonction de $\|g\|_\infty$.

8.5. Montrer que $\mathrm{T} : g \mapsto \mathrm{T}_g$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_\infty)$.

8.6. Prouver que si g tend vers 0 en $+\infty$ alors T_g aussi.

9. On étudie dans cette question un endomorphisme induit par T sur un sous-espace stable de E.

9.1. Pour $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$, justifier la convergence de l'intégrale suivante et la calculer :

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} e^{(i-1)t}\,\mathrm{d}t$$

9.2. Dans l'espace vectoriel E, on considère $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$. Montrer que $\mathrm{T} : g \mapsto \mathrm{T}_g$ définit un endomorphisme de F et donner sa matrice dans la base $(\cos, \sin)$ de F.
Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?