DEVOIR À LA MAISON N°8

POUR LE LUNDI 2 MARS

La partie II du problème est facultative.

PROBLÈME

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$ et de sa norme euclidienne associée notée $\|\cdot\|$.
Dans la suite, on s'intéresse à l'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On se permettra d'identifier tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ au vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

- Une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXSX \geqslant 0$$

  On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives.
- Une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^tXSX > 0$$

  On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

PARTIE I

1. Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$. Établir les relations :

(A) ${}^tXY = {}^tYX$ **(B)** $({}^tXY)^2 = {}^tX(Y{}^tY)X = {}^tY(X{}^tX)Y$ **(C)** ${}^tXSY = (X|SY) = (SX|Y)$

2. Prouver les propositions suivantes :

(A) $\forall (S_1, S_2) \in S_n^+(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}), \quad S_1 + S_2 \in S_n^+(\mathbb{R})$
(B) $\forall (S_1, S_2) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}), \quad S_1 + S_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
(C) $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad {}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$

3. **3.1.** Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tXSX = 0$ pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que toute valeur propre de S est nulle et en déduire que $S = 0$.

3.2. Donner un exemple de matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXMX = 0$$

4. **4.1.** Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, montrer que S appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
Pour le sens indirect, on pourra utiliser le théorème spectral sur la matrice S.

4.2. Que peut-on dire d'une matrice symétrique réelle semblable à une matrice symétrique réelle positive ?

5. Si E est un ensemble et $\leqslant$ une relation binaire sur E, on rappelle que $\leqslant$ est une *relation d'ordre* si elle est :

- **réflexive :** $\forall x \in E, \ x \leqslant x$;
- **antisymétrique :** $\forall x, y \in E, \ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \implies x = y$;
- **transitive :** $\forall x, y, z \in E, \ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \implies x \leqslant z$.

Cette relation d'ordre est dite *totale* si pour tous éléments x et y de E on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.
Sur l'ensemble $S_n(\mathbb{R})$, on définit deux relations notées $\geqslant$ et $>$ en posant, pour tous S_1, S_2 de $S_n(\mathbb{R})$:

$$S_1 \geqslant S_2 \iff S_1 - S_2 \in S_n^+(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad S_1 > S_2 \iff S_1 - S_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

5.1. Montrer que la relation $\geqslant$ est une relation d'ordre sur $S_n(\mathbb{R})$.

5.2. Pour $n \geqslant 2$, montrer que cette relation d'ordre n'est pas totale.

5.3. La relation $>$ est-elle une relation d'ordre sur $S_n(\mathbb{R})$?

5.4. Donner un exemple dans $S_2(\mathbb{R})$ montrant que $S_1 \geqslant S_2$ et $S_1 \neq S_2$ n'implique pas nécessairement $S_1 > S_2$.

6. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

(A) S est définie positive;
(B) Toutes les valeurs propres de S sont strictement positives;
(C) Il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t MM$;
(D) S est positive et inversible.

On montrera la suite d'implications **(A)** $\Longrightarrow$ **(B)** $\Longrightarrow$ **(C)** $\Longrightarrow$ **(D)** $\Longrightarrow$ **(A)**.
Pour **(B)** $\Longrightarrow$ **(C)**, *on justifiera qu'il existe* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *de coefficients diagonaux strictement positifs telles que* $S = PDP^{-1}$, *on considérera alors* $R = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$.
Pour **(D)** $\Longrightarrow$ **(A)**, *on pourra utiliser le théorème spectral sur la matrice* S.

Partie II ★

7. Soient A_n et B_n les matrices de $S_n(\mathbb{R})$ données par :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_n = 2I_n - B_n$$

7.1. Pour tout vecteur $X = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, montrer que :

$${}^t X A_n X = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

7.2. En déduire que A_n est définie positive.

7.3. En cherchant une matrice M_n de la forme :

$$M_n = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix} \quad \text{pour } (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } (v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

déterminer explicitement une matrice M_n inversible telle que $A_n = {}^t M_n M_n$.
On pourra, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, *exprimer* u_{i+1}^2 *en fonction de* u_i^2 *et ainsi conjecturer puis vérifier par récurrence une expression de* u_i^2 *en fonction de* $i \in [\![1, n]\!]$.

8. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in GL_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $S = {}^t MM$ (l'existence de M est assurée par la question **6.**). On note $\mathscr{U} = (U_1, \dots, U_n)$ la famille des vecteurs colonne de M. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on notera $p_i(x)$ la projection orthogonale de x sur $\operatorname{Vect}(U_1, \dots, U_i)$.
On cherche à démontrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure inversible telle que $S = {}^t TT$.

8.1. Justifier que $\mathscr{U}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

8.2. On définit une famille $\mathscr{V} = (V_1, \dots, V_n)$ de vecteurs par les relations :

$$V_1 = U_1 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![2, n]\!], \quad V_i = U_i - p_{i-1}(U_i)$$

Prouver que $\mathscr{V}$ est une famille orthogonale et que c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

8.3. Si on pose, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $W_i = V_i / \|V_i\|$, la famille $\mathscr{W} = (W_1, \dots, W_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que la matrice de passage de la base $\mathscr{U}$ à la base $\mathscr{W}$ est triangulaire supérieure.

8.4. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{W}$.
Montrer que $M = PT$ avec T une matrice triangulaire supérieure inversible et conclure que $S = {}^tTT$.

8.5. On s'intéresse à la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que S admet une décomposition de la forme $S = {}^tTT$ où T est une matrice triangulaire supérieure inversible à expliciter.
En déduire que S est symétrique réelle définie positive.

9. En utilisant le résultat de la question **8.**, démontrer que si $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors :

$$\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$$

10. Dans cette question, on pourra librement utiliser l'inégalité dite *arithmético-géométrique* suivante :

$$\forall\, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

On se donne $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et on note $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1. On cherche à prouver l'existence et à calculer la valeur de :

$$m = \inf_{A \in \mathscr{C}} \operatorname{Tr}(AS)$$

Grâce au théorème spectral appliqué à la matrice symétrique réelle S et avec la question **6.**, on sait que l'on peut écrire $S = PD{}^tP$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

10.1. Démontrer que si $A \in \mathscr{C}$ alors $B = {}^tPAP$ est également une matrice de $\mathscr{C}$ et que $\operatorname{Tr}(AS) = \operatorname{Tr}(BD)$.

10.2. Prouver que $\{\operatorname{Tr}(AS), A \in \mathscr{C}\} = \{\operatorname{Tr}(BD), B \in \mathscr{C}\}$ puis que ces deux ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.

10.3. On se donne $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{C}$. Établir que :

$$\operatorname{Tr}(BD) \geqslant n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n} (b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}$$

En déduire que $\operatorname{Tr}(BD) \geqslant n(\det S)^{1/n}$.

10.4. Conclure en déterminant la valeur de m.