# DEVOIR À LA MAISON N°9



POUR LE VENDREDI 27 MARS

*Le problème II est facultatif.*

## PROBLÈME I

On se donne $p \in ]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Dans ce problème, on considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la $n$−ième lettre à l'instant $n$ de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités $p$ et $q$ (respectivement) d'être générées.

Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre. On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{P}_n$ l'évènement : « l'automate génère la lettre P à l'instant $n$ » et $\mathrm{C}_n$ l'évènement : « l'automate génère la lettre C à l'instant $n$ ».

### PARTIE I – ÉTUDE D'UN CAS SIMPLE

Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1.

On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ telle que $\mathrm{Y}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{G_Y}$ la série génératrice de Y et $\mathrm{R_Y}$ son rayon de convergence. On sait alors que $\mathrm{R_Y} \geqslant 1$ et que :

$$\forall t \in ]-\mathrm{R_Y}, \mathrm{R_Y}[, \quad \mathrm{G_Y}(t) = \mathrm{E}(t^{\mathrm{Y}}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Y}=n)\, t^n$$

**1.** Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**2.** Montrer que $\mathrm{R_Y} = 1/p > 1$ et que :

$$\forall t \in \left]-1/p, 1/p\right[, \quad \mathrm{G_Y}(t) = \frac{qt}{1-pt}$$

**3.** Montrer que $\mathrm{G_Y}$ est deux fois dérivable en 1 et que :

$$\mathrm{G}'_{\mathrm{Y}}(1) = \frac{1}{q} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}''_{\mathrm{Y}}(1) = \frac{2p}{q^2}$$

**4.** Donner, si elles existent, les valeurs de $\mathrm{E(Y)}$ et $\mathrm{V(Y)}$.

### PARTIE II – SÉRIES ENTIÈRES

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(a) = -\frac{1}{a^{n+1}}$$

**5.** Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n(a) z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

6. Si $|z| < |a|$, établir que :

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a) z^n$$

Soient $a$, $b$ et $\lambda$ des complexes non nuls. Dans les questions **7** à **10**, on suppose que $|a| < |b|$. On définit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k(a) u_{n-k}(b)$$

et, pour tout réel $t$ vérifiant $|t| < |a|$ :

$$f(t) = \frac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$$

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)$$

8. Trouver un équivalent simple de $v_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
9. En déduire que le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 0} v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que, pour $|z| < |a|$, on a :

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n$$

10. Justifier que $f$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence $\mathrm{R}_f$ tel que $\mathrm{R}_f = |a|$.

### Partie III – Étude d'un cas intermédiaire

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C. De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC.

On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC. On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ telle que $\mathrm{Z}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{Z} = n)$. On note $\mathrm{G_Z}$ la série génératrice de Z et $\mathrm{R_Z}$ son rayon de convergence. On rappelle que $\mathrm{R_Z} \geqslant 1$.

11. Calculer les probabilités $p_1$, $p_2$ et $p_3$.
12. Justifier que $(\mathrm{P}_1, \mathrm{C}_1 \cap \mathrm{P}_2, \mathrm{C}_1 \cap \mathrm{C}_2)$ est un système complet d'événements.
13. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad p_n = p p_{n-1} + pq p_{n-2}$$

14. Établir alors que :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad \mathrm{G_Z}(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2 t^2$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on introduit $\mathrm{Q}(t) = 1 - pt - pqt^2$ et on pose :

$$\Delta = p^2 + 4pq > 0, \qquad a = \frac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{-\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$$

15. Montrer que $\mathrm{Q}(-1) = 1 + p^2 > 0$ et que $\mathrm{Q}(1) = q^2 > 0$.
16. Pour $t \in \mathbb{R}$, démontrer que $\mathrm{Q}(t) = -pq(t-a)(t-b)$.
17. Prouver que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel $t$ vérifiant $|t| < |a|$, on définit :

$$f(t) = \frac{q^2 t^2}{1 - pt - pqt^2}$$

**18.** Justifier que $f$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que sa série entière associée est $G_Z$ avec un rayon de convergence $R_Z = |a|$.

**19.** Prouver que :

$$\forall t \in ]-|a|, |a|[, \quad G_Z(t) = \frac{q^2 t^2}{1 - pt - pqt^2}$$

**20.** Montrer que Z admet une espérance et une variance puis que $E(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.

**21.** Vérifier que $E(Z) \geqslant E(Y) + 1$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

## Problème II $^\star$

Dans tout ce problème, $n$ est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :

- $\mathscr{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$.
- $\mathscr{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0, 1]$.

Ce problème aborde l'étude des matrices à coefficients dans $\{0, 1\}$ à travers plusieurs thématiques indépendantes les unes des autres.

### Partie I – Généralités

**1.** Justifier que $\mathscr{X}_n$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.

**2.** Démontrer que pour tout $M \in \mathscr{Y}_n$, on a $\det(M) \leqslant n!$ et qu'il n'y a pas égalité.

**3.** Démontrer que $\mathscr{Y}_n$ est une partie convexe, fermée et bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**4.** Soit $M \in \mathscr{Y}_n$ et $\lambda$ une valeur propre complexe de M. Démontrer que $|\lambda| \leqslant n$.
Donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.

### Partie II – Deux problèmes d'optimisation

**5.** Dans cette question on étudie la distance à $\mathscr{Y}_n$. Pour ce faire, on pose :

$$\forall (M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad (M \mid N) = \mathrm{Tr}({}^t MN)$$

**5.1.** Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Expliciter $(M \mid N)$ en fonction des coefficients de M et de N. On notera $\|M\|$ la norme euclidienne associée.

**5.2.** On fixe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, prouver qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{Y}_n$ telle que :

$$\forall N \in \mathscr{Y}_n, \quad \|A - M\| \leqslant \|A - N\|$$

**5.3.** Justifier l'unicité de la matrice M ci-dessus et expliciter ses coefficients en fonction de ceux de A.

**6.** Dans cette question, on maximise le déterminant sur $\mathscr{X}_n$ et $\mathscr{Y}_n$

**6.1.** Justifier que le déterminant possède un maximum sur $\mathscr{X}_n$ (noté $x_n$) et un maximum sur $\mathscr{Y}_n$ (noté $y_n$).

**6.2.** Démontrer que la suite $(y_k)_{k \geqslant 2}$ est croissante.

**6.3.** Soit $J \in \mathscr{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$.
Calculer $\det(M)$ et en déduire que $\lim_{k \to +\infty} y_k = +\infty$.

**6.4.** Soient $N = (n_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{Y}_n$. Fixons $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et supposons que $n_{i,j} \in ]0, 1[$.
Démontrer qu'en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0, soit par 1, on peut obtenir une matrice $N'$ de $\mathscr{Y}_n$ telle que $\det(N) \leqslant \det(N')$. En déduire que $x_n = y_n$.

### Partie III – Matrices aléatoires de $\mathscr{X}_n$

Soient $p \in ]0, 1[$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p$.

**7.** Calculer la probabilité que $X_1, \dots, X_n$ soient égales.

**8.** Quelle est la loi de $S = X_1 + \dots + X_n$ ? On attend une démonstration du résultat annoncé.

**9.** Soient $i$ et $j$ dans $[\![1, n]\!]$. Donner la loi de la variable aléatoire $X_{i,j} = X_i \times X_j$.

**10.** Si $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)\,{}^t(U(\omega))$. L'application $M : \omega \in \Omega \longmapsto M(\omega) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est ainsi une variable aléatoire.

**10.1.** Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega) \in \mathscr{X}_n$.

**10.2.** Si $\omega \in \Omega$, justifier que $\mathrm{Tr}(M(\omega)) \in \{0, \dots, n\}$, que $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{rg}(M(\omega)) \leqslant 1$.

**10.3.** Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $S(\omega) \in \{0, 1\}$

**11.** Donner la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires $\mathrm{Tr}(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$.

**12.** Exprimer $M^k$ en fonction de $S$ et $M$ pour $k \in \mathbb{N}$.
Quelle est la probabilité que la suite des matrices $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente ?
Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.

**13.** Quelle est la probabilité que $M$ admette deux valeurs propres distinctes ?