Lycée Descartes
Tours

DEVOIR SURVEILLÉ n°1

PSI
2019 – 2020

SAMEDI 14 SEPTEMBRE 2019

DURÉE : 4h00

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Le sujet comporte trois exercices et un problème totalement indépendants.

EXERCICE 1 – ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE

Dans la suite, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On commence par faire une étude de la fonction f.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer, si elles existent, les limites de f' en 0 et en $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Vérifier qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ que l'on explicitera telle que :
$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} g(x)$$
5. Justifier l'existence de g' et g'', donner leurs expressions et en déduire le signe de f''.
6. Étudier les variations de f, on précisera les limites aux bornes du domaine et on tracera l'allure de la courbe représentative de f.

On étudie maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. Démontrer que :
$$\forall x \geqslant 0, \quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$
8. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
9. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \ln(2)|$$
10. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 2 – Étude d'une suite définie implicitement

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ non nul, la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n$$

1. Démonter que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on notera x_n dans la suite.

Nous allons étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donner un développement asymptotique du terme x_n.

2. Justifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 1 + \frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant 1 + \frac{2}{n}$$

Conclure quant à la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Dans cette question, on fixe un réel a.

3.1. Démontrer que la suite de terme général $\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$ converge et donner sa limite.

3.2. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de la limite de la suite de terme général :

$$n\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} - (n+1)\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

4. Prouver que l'équation $e^x(x-1) = 1$ possède une unique solution réelle notée α et que $\alpha \in]1,2[$.

5. Soit $\varepsilon \in]0, \alpha - 1[$. Démontrer que, à partir d'un certain rang, on a :

$$1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n} \leqslant x_n \leqslant 1 + \frac{\alpha + \varepsilon}{n}$$

6. En déduire que :

$$x_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 3 – Étude d'une suite

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la quantité S_p par :

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k}$$

1. Vérifier que la suite $\left(S_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente vers $+\infty$.

2. Montrer qu'il existe au moins un entier naturel $p \geqslant 1$ tel que l'on ait $S_p > 1$.

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus entier naturel $p \geqslant 1$ vérifiant $S_p > 1$. On pose enfin :

$$u_n = \frac{a_n}{n}$$

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

4. Prouver que, pour $n \geqslant 2$, on a $S_{n-1} < 1$ et $S_{2n-2} > 1$.

5. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ alors $\ell \in [2,3]$.

6. Démontrer que, pour $n \geqslant 1$, on a :

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$$

7. Justifier que, pour $n \geqslant 1$, on a :

$$1-\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n-1} \leqslant 1$$

8. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Problème – Étude de produits infinis

On se donne une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle ou complexe. On définit :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \mathrm{P}_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k$$

La suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant n_0}$ est appelée le *produit infini de terme général* u_n et est notée $\prod\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

Si la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant n_0}$ admet une limite **non nulle**, on dit que $\prod\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge et on note $\prod\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ cette limite.

Premiers exemples

1. Montrer que les trois produits infinis suivants convergent et donner leurs valeurs :

   1.1. $\prod\limits_{n\geqslant 2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

   1.2. $\prod\limits_{n\geqslant 2}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. On fixe $x>1$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $u_1 = x$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 2u_n^2-1$.

   2.1. On rappelle que la fonction tangente hyperbolique th est définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}(y) = \frac{\mathrm{sh}(y)}{\mathrm{ch}(y)}$$

   Démontrer que :

   $$\forall y \neq 0, \quad 1+\frac{1}{\mathrm{ch}(y)} = \frac{\mathrm{th}(y)}{\mathrm{th}(y/2)}$$

   Prouver également que :

   $$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(2y) = 2\,\mathrm{ch}(y)^2-1$$

   2.2. Démontrer qu'il existe un unique $t>0$ tel que $x = \mathrm{ch}(t)$.

   2.3. Justifier que $u_n = \mathrm{ch}(2^{n-1}t)$ pour $n \geqslant 1$.

   2.4. Prouver que le produit infini suivant converge et donner sa valeur en fonction de t :

   $$\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

Critères de convergence d'un produit infini

3. Prouver que si $\prod\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

4. On se place dans le cas où $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$.
   Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(u_n)$ converge.

5. On suppose que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$.
   Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant 0} (1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

6. On se place dans le cas où $u_n > -1$ pour tout $n \geqslant 0$ et on suppose que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n^2$ converge.

6.1. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \ln(1+u_n)$ converge.
Indication : on pourra écrire $\ln(1+u_n) = (\ln(1+u_n) - u_n) + u_n$.

6.2. En déduire que le produit infini $\prod\limits_{n \geqslant 0} (1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

Étude de quelques produits infinis

7. Donner un contre-exemple permettant de justifier que la réciproque du résultat démontré à la question **3.** est fausse.

8. Étudier la convergence du produit infini $\prod\limits_{n \geqslant 2} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

9. Étudier la convergence du produit infini $\prod\limits_{n \geqslant 2} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.

10. On se demande ce qu'il peut se passer si on ne suppose plus dans la question **6.** que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n^2$ converge.
Pour ce faire, on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad u_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$$

10.1. Étudier les natures des séries $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n^2$.

10.2. Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n \geqslant 2} (1+u_n)$ est convergent.

⋆ ⋆
⋆