DEVOIR SURVEILLÉ N°2

SAMEDI 5 OCTOBRE 2019

DURÉE : 4h00

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Le sujet comporte un exercice et un problème totalement indépendants.

EXERCICE – ÉTUDE DE QUELQUES SÉRIES

1. Étudier la nature des deux séries suivantes :

1.1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$

1.2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k!$

2.1. Démontrer que :

$$\forall n\geqslant 3,\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} + v_n \qquad \text{avec} \qquad |v_n| \leqslant \frac{n-2}{n(n-1)(n+1)}$$

2.2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

3. On s'intéresse à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$.

3.1. Justifier la convergence de cette série et donner sa somme.
Dans la suite, on introduit, pour $n\in\mathbb{N}$, le reste R_n de la série en posant :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

3.2. Expliciter R_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

3.3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{R}_n$ et sa somme en cas de convergence.

4. On s'intéresse à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$.

4.1. Justifier la convergence de cette série.
Dans la suite, on introduit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le reste R_n de la série en posant :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

4.2. Établir que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall p > n, \quad \int_{n+1}^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{n}^{p} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$$

4.3. Prouver que l'on a alors :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

4.4. En déduire un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4.5. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{R}_n$.

5. On s'intéresse à la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

5.1. Justifier la convergence de cette série.
Dans la suite, on introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste R_n de la série en posant :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

5.2. En remarquant et en justifiant que $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k \, \mathrm{d}t$ pour $k \in \mathbb{N}$, établir que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall p > n, \quad \sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t + (-1)^p \int_0^1 \frac{t^{p+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

5.3. Démontrer que :

$$\forall p \geqslant 1, \quad \left| (-1)^p \int_0^1 \frac{t^{p+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{p+2}$$

5.4. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \mathrm{R}_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

5.5. Grâce à une intégration par parties, prouver que :

$$\mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+2)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5.6. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{R}_n$.

5.7. Déduire des questions précédentes la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Problème – Suites de matrices

On fixe $p \geqslant 2$ un entier naturel supérieur à 2. On travaille dans l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels et on note I_p la matrice identité. Pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout couple $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, on note $a_{i,j}(\mathrm{M})$ le coefficient de la matrice M situé sur la ligne i et la colonne j.

Une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si elle satisfait les deux conditions suivantes :

$$\textbf{(C}_1\textbf{)} \quad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad a_{i,j}(\mathrm{M}) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \textbf{(C}_2\textbf{)} \quad \forall i \in [\![1,p]\!], \quad \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(\mathrm{M}) = 1$$

Dans ce problème, on dira qu'une suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, la suite réelle $(a_{i,j}(\mathrm{M}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}(\mathrm{M})$. On dit alors que M est la *limite* de la suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Étant donnée une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on introduit, pour $n \geqslant 0$, la matrice C_n définie par :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\left(I_p + A + \cdots + A^n\right) \qquad (\star)$$

On dit enfin, si $r \in \mathbb{N}^*$, qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est r−périodique si $A^r = I_p$.

On cherche à étudier la limite de la suite de matrices $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous certaines hypothèses sur la matrice A.

Étude d'exemples

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit une suite $\left(\gamma_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{1}{n+1}\left(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n\right)$$

1.1. Calculer γ_n pour $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Étudier la convergence de la suite $\left(\gamma_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et, en cas de convergence, préciser sa limite.

2. Dans cette question, on prend $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.1. Calculer A^2 et A^3. En déduire A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

2.2. Pour tout entier $q \in \mathbb{N}$, calculer C_{3q}, C_{3q+1} et C_{3q+2}.

2.3. En déduire que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite C.

2.4. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice C.
Déterminer le noyau F et l'image G de v. Prouver que v est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F.

3. Dans cette question, on prend $p = 2$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3.1. On note w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est la matrice A.
Déterminer une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $w(e_1) = e_1$ et $w(e_2) = -\frac{1}{6}e_2$.

3.2. Donner une matrice $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

3.3. En déduire A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

3.4. Déterminer deux matrices U et V de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = U + \frac{(-1)^k}{6^k}V$$

3.5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer C_n en fonction de n, U et V et déterminer la limite C de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.6. Si v désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est la matrice C, prouver que v est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Étude de C_n lorsque A est r−périodique

4. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on se donne $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite r−périodique de nombres réels, c'est-à-dire que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On pose :

$$\gamma = \frac{1}{r}\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{1}{n+1}\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\right)$$

4.1. Démontrer par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \gamma = \frac{1}{r}\left(\alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+r-1}\right)$$

4.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\beta_n = (n+1)\gamma_n - (n+1)\gamma$. Montrer que la suite $\left(\beta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est r−périodique.
En déduire que la suite $\left(\beta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4.3. Montrer que la suite $\left(\gamma_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

5. On prend $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice r−périodique.

5.1. Montrer que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la suite $(a_{i,j}(A^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est r−périodique.

5.2. En déduire que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice :

$$C = \frac{1}{r}\left(I_p + A + \cdots + A^{r-1}\right)$$

5.3. On désigne par u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ sont respectivement A et C.
Exprimer v en fonction de u. Prouver que $u^r = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}$ et que $u \circ v = v \circ u = v$.

5.4. Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Prouver que $u(x) = x$ si et seulement si $v(x) = x$, puis que $x \in \mathrm{Im}\, v$ si et seulement si $u(x) = x$.
En déduire $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p})$.

5.5. Prouver que v est le projecteur sur $G = \mathrm{Im}\, v$ parallèlement à $F = \mathrm{Ker}\, v$.

5.6. Établir enfin que $\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p})$.

Étude de matrices stochastiques

Dans cette partie, on notera $S_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $D_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices *déterministes* de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, c'est-à-dire stochastiques dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1.

6. On s'intéresse à l'ensemble $S_p(\mathbb{R})$.

6.1. On se donne $(M,N) \in S_p(\mathbb{R})^2$ et deux réels $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$ positifs vérifiant $\lambda + \mu = 1$.
Vérifier que $\lambda M + \mu N$ appartient à $S_p(\mathbb{R})$.

6.2. Prouver que le produit de deux éléments M et N de $S_p(\mathbb{R})$ appartient à $S_p(\mathbb{R})$.

6.3. Soit $A \in S_p(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice C_n définie par $(\star)$ appartient à $S_p(\mathbb{R})$.
En supposant que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice C, montrer que $C \in S_p(\mathbb{R})$.

7. On s'intéresse enfin à l'ensemble $D_p(\mathbb{R})$.

7.1. Montrer qu'une matrice M est déterministe si et seulement si tous ces coefficients sont égaux à 0 ou 1 et si chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1.

7.2. En déduire que $D_p(\mathbb{R})$ est un ensemble fini et donner son cardinal.

7.3. Prouver que le produit de deux éléments M et N de $D_p(\mathbb{R})$ appartient à $D_p(\mathbb{R})$.

7.4. On se donne $A \in D_p(\mathbb{R})$ une matrice déterministe. Prouver qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ et un entier $m \geqslant 0$ tels que $A^{m+r} = A^m$. Si de plus A est supposée inversible, montrer que A est r−périodique.

7.5. Enfin, si $A \in D_p(\mathbb{R})$ est une matrice déterministe inversible, prouver que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice C stochastique vérifiant $C^2 = C$.

⋆ ⋆
⋆