DEVOIR SURVEILLÉ n°3

SAMEDI 9 NOVEMBRE 2019

DURÉE : 4h00

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Le sujet comporte un exercice et un problème totalement indépendants.

EXERCICE – ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME

On introduit $\mathrm{E} = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Dans la suite, on identifie les éléments de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ à des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in \mathrm{E}$, on note $\mathrm{U}(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{U}(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in \mathrm{E}$ une fonction $\mathrm{T}-$périodique. Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On pourra commencer par montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{\mathrm{T}}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $f \in \mathrm{E}$ une fonction dérivable.
Si f est $\mathrm{T}-$périodique, montrer que f' est également $\mathrm{T}-$périodique. La réciproque est-elle vraie ?

3. Pour $f \in \mathrm{E}$, montrer que $\mathrm{U}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Prouver que l'application U qui à toute fonction $f \in \mathrm{E}$ associe $\mathrm{U}(f)$ est un endomorphisme de E.

5. Dans cette question, on introduit $\mathrm{E}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n à coefficients réels.
On continue d'identifier polynôme et fonction polynomiale. Soit $\mathscr{B}_n = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ la base canonique de E_n.

5.1. Montrer que E_n est stable par U.
On introduit dans la suite U_n l'endomorphisme induit par U sur E_n :

$$\mathrm{U}_n : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}_n & \longrightarrow & \mathrm{E}_n \\ f & \longmapsto & \mathrm{U}(f) \end{array}$$

5.2. Écrire la matrice de U_n dans la base $\mathscr{B}_n$.

5.3. L'endomorphisme U_n est-il bijectif ? Diagonalisable ?

6. Soit $f \in \mathrm{E}$ élément de $\operatorname{Ker}\mathrm{U}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et que f est périodique de période 1.

7. L'égalité suivante est-elle vraie ?

$$\operatorname{Ker}\mathrm{U} = \left\{ f \in \mathrm{E},\ f \text{ périodique de période 1 telle que } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

8. Donner explicitement une fonction $f \in \mathrm{E}$ non nulle et élément de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{U}$.
En donner une représentation graphique sur le segment $[-1,2]$.

9. L'endomorphisme U est-il surjectif?

10. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un réel non nul et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{at}$.

10.1. Déterminer $\mathrm{F}_a = \mathrm{U}(f_a)$.

10.2. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}^*$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Prouver que g peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et donner son tableau de variations.

10.3. Établir que tout réel $\lambda > 0$ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme U.

Problème – Racines carrées d'endomorphismes

Dans ce problème, on fixe $n \geqslant 2$ un entier naturel supérieur à 2 et E un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de dimension finie n. On note $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Si f désigne un endomorphisme de E et si k est un entier, on note $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k fois) avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
Pour un endomorphisme f de E, le problème s'intéresse aux « racines carrées » de l'endomorphisme f, c'est-à-dire à l'ensemble :

$$\mathscr{R}(f) = \left\{h \in \mathscr{L}(\mathrm{E}),\, h^2 = f\right\}$$

On note dans la suite $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Partie I

1. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1. Montrer que f est diagonalisable.

1.2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
Donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.

1.3. Soient P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) et $m \in \mathbb{N}^*$.
Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.

1.4. Calculer P^{-1} puis donner, pour $m \in \mathbb{N}^*$, la matrice de f^m dans la base canonique.

1.5. Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D.

1.6. Montrer que si $\mathrm{H} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{H}^2 = \mathrm{D}$ alors H et D commutent.

1.7. Déduire de ce qui précède toutes les matrices $\mathrm{H} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{H}^2 = \mathrm{D}$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leurs matrices dans la base canonique.

2. Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1. Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

2.2. En déduire que :

$$\forall m \geqslant 1, \quad f^m = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{1}{3}(4^m - 1)\, j$$

Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

2.3. Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ avec $\lambda < \mu$.

2.4. Montrer qu'il existe un couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall m \geqslant 0, \quad f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

Montrer que (p, q) est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

2.5. Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ qui sont combinaison linéaire de p et q et qui vérifient $h^2 = f$.

2.6. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f.
Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et q, dans cette nouvelle base.

2.7. Déterminer une matrice $\mathrm{K} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $\mathrm{K}^2 = \mathrm{I}_2$, puis une matrice $\mathrm{Y} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $\mathrm{Y}^2 = \mathrm{D}$.

2.8. En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire des endomorphismes p et q.

2.9. Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Partie II

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E. Dans la suite, on suppose qu'il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ avec $\lambda \neq \mu$ et deux endomorphismes $(p, q) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$ de E tels que :

$$\mathrm{Id}_\mathrm{E} = p + q, \quad f = \lambda p + \mu q \quad \text{et} \quad f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q$$

3. Calculer $(f - \lambda\, \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (f - \mu\, \mathrm{Id}_\mathrm{E})$. En déduire que f est diagonalisable.

4. Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.

5. Grâce au résultat de la question **3**, montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.

6. Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.

7. Établir que :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

8. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ engendré par p et q, c'est-à-dire $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(p, q)$.
Déterminer la dimension de F.

On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs.

9. Déterminer $\mathscr{R}(f) \cap \mathrm{F}$.

10. Soit $k \geqslant 2$ un entier supérieur à 2. Donner une matrice $\mathrm{K} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale vérifiant $\mathrm{K}^2 = \mathrm{I}_k$.

11. Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, il existe un endomorphisme $p' \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \backslash \mathrm{F}$ vérifiant $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

12. En déduire que si $\dim(\mathrm{E}) \geqslant 3$, on a $\mathscr{R}(f) \not\subset \mathrm{F}$.

Partie III

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E. Dans la suite, on suppose qu'il existe m réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distincts deux à deux et m endomorphismes non nuls de E notés $p_1, \ldots, p_m$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k = \lambda_1^k p_1 + \cdots + \lambda_m^k p_m$$

13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que $P(f) = P(\lambda_1)p_1 + \cdots + P(\lambda_m)p_m$.

14. En déduire que $(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_m \mathrm{Id}_E) = 0$ puis que f est diagonalisable.

15. Pour tout entier $k \in [\![1, m]\!]$, on considère le polynôme :

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq k}} \frac{X - \lambda_\ell}{\lambda_k - \lambda_\ell}$$

Pour $k \in [\![1, m]\!]$, montrer que l'on a $p_k = L_k(f)$ et en déduire $\mathrm{Im}(p_k) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{id}_E)$.
Prouver que le spectre de f est $\mathrm{sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.

16. Vérifier que pour tout couple d'entiers $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

17. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ engendré par $p_1, \ldots, p_m$, c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(p_1, \ldots, p_m)$.
Déterminer la dimension de F.

18. Déterminer $\mathscr{R}(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.

⋆ ⋆
⋆