DEVOIR SURVEILLÉ n°4

SAMEDI 14 DÉCEMBRE 2019

DURÉE : 4h00

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Le sujet comporte un exercice et un problème totalement indépendants.

EXERCICE – ÉTUDE DE DEUX ENDOMORPHISMES

On travaille dans la suite dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$, on définit la fonction e_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad e_n(x)=x^n e^{-x}$$

Enfin, on fixe un entier non nul $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$ et on pose $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_{\mathrm{N}})$.

1. Montrer que $\mathscr{B}=(e_0,\dots,e_{\mathrm{N}})$ est une base de F et en déduire la dimension de F.

2. Pour tout élément g de F, on note $\Delta(g)=g'$.

2.1. Démontrer que Δ est un endomorphisme de F.

2.2. Écrire la matrice A de Δ dans la base $\mathscr{B}$. L'endomorphisme Δ est-il bijectif ?

2.3. Déterminer les éléments propres de Δ. L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

3. Soit $\ell\in\mathbb{N}$. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} n^\ell e^{-n}$ est convergente. Dans la suite, on note A_ℓ sa somme.

4. On fixe $k\in[\![0,\mathrm{N}]\!]$ et $x\geqslant 0$.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} e_k(x+n)$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de k, x et des $(\mathrm{A}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$.

5. Soient $f\in\mathrm{F}$ et $x\geqslant 0$. Prouver que la série $\sum_{n\geqslant 0} f(x+n)$ est convergente.

6. Pour $f\in\mathrm{F}$, la question précédente permet de définir une nouvelle fonction sur $\mathbb{R}_+$, notée $\Phi(f)$, en posant :

$$\forall x\geqslant 0,\quad \Phi(f)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n)$$

6.1. Prouver que $\Phi : f\mapsto\Phi(f)$ est un endomorphisme de F.

6.2. Écrire la matrice B de Φ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction des $(\mathrm{A}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

⋆ ⋆
⋆

Problème – Étude de la fonction zêta alternée de Riemann

Ce problème propose une étude croisée des propriétés des fonctions zêta ζ et zêta alternée F de Riemann.

Partie I – Définition des fonctions ζ et F

1. Justifier que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.

On définit la *fonction zêta de Riemann* ζ comme étant la somme de cette série de fonctions sur $]1,+\infty[$:

$$\forall x > 1, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

2. Justifier que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On définit la *fonction zêta alternée de Riemann* F comme étant la somme de cette série de fonctions sur $]0,+\infty[$:

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

Partie II – Calcul de F(1)

Dans cette partie, on introduit, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n suivante :

$$\mathrm{J}_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \, \mathrm{d}t$$

3. Calculer J_1.

4. Prouver que la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. En déduire qu'elle est convergente.
Dans la suite, on note ℓ sa limite.

5. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{J}_n + \mathrm{J}_{n+2}$. En déduire la valeur de ℓ.

6. En utilisant la relation précédente, établir (par exemple par récurrence) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \mathrm{J}_1 + (-1)^{n-1}\mathrm{J}_{2n+1}$$

7. En déduire finalement la valeur de F(1).

Partie III – Propriétés de F

8. Dans cette question, on étudie la continuité de F et sa limite de F en $+\infty$.

8.1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 1$.

8.2. En déduire que F est continue sur $]1,+\infty[$ et donner sa limite en $+\infty$.

8.3. Prouver que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.

8.4. En déduire que F est continue sur $]0,+\infty[$.

9. Dans cette question, on étudie la dérivabilité de F.

9.1. Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$.

En déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

9.2. Pour $n \geqslant 1$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Prouver que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur $[\,a, +\infty\,[$ avec $a > 0$.

9.3. En déduire que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0, +\infty\,[$.

10. Dans cette question, on établit un lien entre les fonctions ζ et F.

10.1. Pour $x > 1$, exprimer $\mathrm{F}(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et $\zeta(x)$ et en déduire :

$$\mathrm{F}(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$$

10.2. Donner la limite de ζ en $+\infty$.

Partie IV – Calcul de la somme d'une série à l'aide de ζ

11. Dans cette question, on obtient un développement asymptotique de ζ au voisinage de 1.

11.1. Écrire le développement limité au point 1 et à l'ordre 1 de la fonction de ζ en fonction de $\ln 2$ et $\mathrm{F}'(1)$. Donner ensuite le développement limité au point 1 et à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

11.2. En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $\mathrm{F}'(1)$, tels que l'on ait au voisinage de 1 l'identité suivante :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1)$$

12. Dans cette question, on cherche de nouveau à obtenir un développement asymptotique de ζ au voisinage de 1 mais de façon différente.
On définit, pour $n \geqslant 1$, les fonctions v_n sur $[\,1, 2\,]$ en posant :

$$\forall x \in [\,1, 2\,], \quad v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

12.1. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [\,1, 2\,]$, établir que :

$$0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

12.2. Justifier que, pour tout réel $x \in [\,1, 2\,]$, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n(x)$ converge.

Dans la suite, on note γ la somme de la série précédente lorsque $x = 1$:

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$$

12.3. Pour $x \in \,]\,1, 2\,]$, exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ en fonction de $\zeta(x)$ et $1 - x$.

12.4. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur $[\,1, 2\,]$.

On pourra s'intéresser au reste de la série de fonctions.

12.5. Justifier que les fonctions $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont continues sur $[\,1, 2\,]$.

12.6. En déduire que l'on a au voisinage de 1 l'identité suivante :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$

13. À l'aide des résultats précédents, démontrer la convergence et donner, en fonction de $\ln 2$ et γ, la valeur de la somme de la série suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$$

Partie VI – Étude d'une fonction à l'aide de F

On définit, pour $n \geqslant 0$, les fonctions u_n sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$$

14. Justifier que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(x)$ converge simplement sur $]\,0\,,+\infty\,[$.

On définit la fonction θ comme étant la somme de cette série de fonctions sur $]\,0\,,+\infty\,[$:

$$\forall x > 0, \quad \theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

15. Prouver que θ est continue sur $]\,0\,,+\infty\,[$.

16. Montrer que θ est strictement monotone sur $]\,0\,,+\infty\,[$.

17. Établir que θ admet une limite en $+\infty$ et donner sa valeur.

18. Pour tout $x > 0$, on introduit ψ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \psi_x(t) = \ln(1 + e^{-tx})$$

18.1. Pour $x > 0$, prouver que la suite $\left(\displaystyle\int_0^n \psi_x(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \geqslant 0}$ est croissante majorée.

Cette suite est donc convergente, on note $\mathrm{L}(x)$ sa limite dans la suite.

18.2. Établir que : $\qquad \forall x > 0, \quad \mathrm{L}(x) \leqslant \theta(x) \leqslant \ln 2 + \mathrm{L}(x)$

18.3. On définit une fonction g sur $]\,0\,,1\,]$ en posant :

$$\forall y \in\,]\,0\,,1\,], \quad g(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$$

Montrer que g peut se prolonger en une fonction continue sur $[\,0\,,1\,]$.

18.4. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y$ en fonction de $\mathrm{F}(2)$.

On pourra utiliser le développement en série entière de $y \mapsto \ln(1+y)$.

18.5. Démontrer que : $\qquad \forall x > 0, \quad \mathrm{L}(x) = \dfrac{\mathrm{F}(2)}{x}$

On pourra réaliser le changement de variable $y = e^{-tx}$.

18.6. En déduire la limite de $x\,\theta(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

⋆ ⋆
⋆