DEVOIR SURVEILLÉ n°5

LUNDI 27 JANVIER 2020

DURÉE : 4h00

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Le sujet comporte un problème.

PROBLÈME – FONCTION Γ ET ÉQUATIONS DE BESSEL

On commence par introduire la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$$

PARTIE I – ÉTUDE DE Γ

1. Prouver que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.
En déduire que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Établir que : $$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3. Donner $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

PARTIE II – DÉMONSTRATION DE L'IDENTITÉ D'EULER

Le but de cette partie est de prouver l'identité suivante, due à Euler :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{E}$$

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t > 0, \quad g_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t < n \\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$

4.1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(g_n)_{n \geqslant 1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.2. Pour $t > 0$, justifier que : $e^{-t} \geqslant 1 - t$.

4.3. En déduire que, pour $n \geqslant 1$ et $t > 0$, on a : $0 \leqslant g_n(t) \leqslant e^{-t}$.

4.4. Démontrer alors que :

$$\forall x > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, \mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

5. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit la fonction $\mathrm{I}_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{I}_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} \, \mathrm{d}t$$

5.1. Pour $n \geqslant 0$, justifier que la fonction I_n est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

5.2. Démontrer la relation suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x > 0, \quad \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = n^x \mathrm{I}_n(x)$$

5.3. Pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, prouver que : $\qquad \mathrm{I}_n(x) = \dfrac{n}{x}\mathrm{I}_{n-1}(x+1)$

5.4. En déduire, pour $n \geqslant 0$ et $x > 0$, une expression de $\mathrm{I}_n(x)$ en fonction de n et x.

6. Conclure en démontrant l'identité d'Euler (E).

Partie III – Une autre expression de Γ

7. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction $u_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x > 0, \quad u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

7.1. Pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, justifier que : $u_n(x) \geqslant 0$.

7.2. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans la suite, on note S la somme de cette série de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire que :

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

De plus, on introduit $\gamma = \mathrm{S}(1)$.

8. Prouver que la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

9. Dans cette question, on calcule une limite impliquant la constante γ.

9.1. Pour $n \geqslant 1$, prouver que : $\qquad \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$

9.2. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \gamma$$

10. Dans cette question, on prouve une identité sur la fonction S.

10.1. Pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, prouver que :

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k(x+1) - u_k(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(1+x) - \ln(n+1+x)$$

10.2. En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{S}(x+1) = \mathrm{S}(x) + \gamma + \ln(1+x)$$

11. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction $\varphi_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x > 0, \quad \varphi_n(x) = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Pour $x > 0$, montrer que $\ln(\varphi_n(x))$ tend vers $\mathrm{S}(x) - \gamma x - \ln x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

12. Conclure enfin que :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x + S(x)}$$

13. Avec cette nouvelle expression de Γ, retrouver l'identité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$.

Partie IV – Équations de Bessel

Dans la suite, $\alpha \geqslant 0$ est un réel fixé et on considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_\alpha) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2) y = 0 \qquad \text{et} \qquad (E'_\alpha) \quad xz'' + (2\alpha+1)z' + xz = 0$$

14. Dans cette question, on se donne une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ de rayon $R > 0$ dont la somme est notée F.

On suppose que F est solution de (E'_α) sur l'intervalle $]-R, R[$. Démontrer que :

$$a_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad (n+1)(n+1+2\alpha)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

15. On se donne maintenant une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions obtenues à la question précédente.

15.1. Prouver que $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15.2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$.

15.3. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \, \Gamma(\alpha+1)}{n! \, 2^{2n} \, \Gamma(n+\alpha+1)} a_0$$

16. Soit $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On définit alors la fonction $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $z(x) = x^{-\alpha} y(x)$ pour $x > 0$. Montrer que y est solution de (E_α) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution de (E'_α) sur $\mathbb{R}_+^*$.

17. En déduire que la fonction $F_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 0, \quad F_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \, 2^{2n+\alpha} \, \Gamma(n+\alpha+1)} x^{2n+\alpha}$$

est solution de (E_α) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie V – Fonctions de Bessel

Dans cette partie, on introduit les fonctions $(J_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad J_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta - p\theta) \, d\theta$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction J_p est appelée *la fonction de Bessel d'indice p*.
On rappelle que, pour $\alpha \geqslant 0$, l'équation différentielle (E_α) a été définie dans la partie précédente. De plus, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on prolonge à $\mathbb{R}$ la fonction F_p de la partie précédente en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \, 2^{2n+p} \, \Gamma(n+p+1)} x^{2n+p}$$

18. Pour $p \in \mathbb{N}$, justifier que la fonction J_p est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sous la forme d'une intégrale les fonctions dérivées J'_p et J''_p.

19. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, établir que :

$$J'_p(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\theta (x\cos\theta - p) \cos(x\sin\theta - p\theta) \, d\theta$$

20. En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction J_p est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_p).

21. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale : $\qquad \mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta \, \mathrm{d}\theta$

Trouver une relation entre W_{n+1} et W_n et en déduire l'expression de W_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

22. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Établir la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de la variable θ suivante :

$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n}\theta}{(2n)!}$$

23. En déduire alors le développement en série entière suivant de la fonction J_0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) \ = \ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta) \, \mathrm{d}\theta \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

24. Prouver que $\mathrm{F}_0 = \mathrm{J}_0$.

25. Établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \sin(x \sin\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

26. En déduire que J_1 est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner son développement et conclure que $\mathrm{F}_1 = \mathrm{J}_1$.

27. Pour $p \geqslant 1$, montrer qu'il existe une constante $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_{p-1}(x) - \mathrm{F}_{p+1}(x) = \mathrm{K}\mathrm{F}'_p(x)$$

28. Toujours pour $p \geqslant 1$, justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_{p-1}(x) - \mathrm{J}_{p+1}(x) = 2\mathrm{J}'_p(x)$$

29. Prouver que $\mathrm{F}_p = \mathrm{J}_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

⋆ ⋆
⋆