RÉVISIONS D'ANALYSE

T.D. n°1

Exercice 1 — Entraînement

1. Résoudre l'équation $|x+3|-|x-1|=|2x+1|$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\sqrt{x+1}=3x-7$ sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation $\ln|x|+\ln|x+1|=0$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Résoudre l'équation $e^{4x+1}+3e^{2x+1}=4e$ sur $\mathbb{R}$.
5. Prouver l'identité suivante :
$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$$
6. Résoudre l'équation $\operatorname{Arccos}(x)=\operatorname{Arcsin}(1/4)+\operatorname{Arccos}(1/5)$ sur $\mathbb{R}$.
7. Résoudre l'équation $\cos(x)-\cos(2x)=\sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$.
8. Pour $x\in\mathbb{R}$, mettre l'expression $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)$ sous la forme $\mathrm{R}\cos(x+\varphi)$ avec $\mathrm{R},\varphi\in\mathbb{R}$.
9. Déterminer la valeur exacte de $\cos(\pi/12)$.
10. Calculer $(1+i\sqrt{3})^{100}$.
11. Simplifier la somme suivante :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{C}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$$
12. Résoudre l'équation $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$ sur $\mathbb{C}$.
13. Résoudre l'équation $(z+1)^n=(z-1)^n$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2 — Limites de suites

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n=\dfrac{2^n+n(-1)^n}{n!+\sin(n)\ln(n^2)}$
2. $u_n=\left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^{2n}$
3. $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^2}$
4. $u_n=\sqrt{n^2+n+1}-n$
5. $u_n=\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\quad(a,\ b\in\mathbb{R}_+^*)$
6. $u_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}a^{-b^{-k}}\quad(a,\ b\in\mathbb{R}^*)$

Exercice 3 — Suite récurrente

On donne $u_0\in\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, la relation :
$$u_{n+1}=(n+1)u_n+2^n(n+1)!$$
Exprimer u_n en fonction de n pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 4 — Suite définie implicitement

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier supérieur à 3, l'équation $e^x = x^n$ admet une unique solution, notée x_n, dans l'intervalle $[0, n]$.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, $x_n \geqslant 1$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et en déduire qu'elle converge vers un réel noté ℓ.
4. Montrer que $\ln(x_n) = \dfrac{x_n}{n}$ et en déduire la valeur de ℓ.
5. Donner un équivalent de $\ln(x_n)$ puis de $x_n - 1$.

Exercice 5 — Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans les deux cas suivants, étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra s'intéresser à la bonne définition et aux valeurs possibles de la suite, à sa monotonie et à son éventuelle convergence.

1. On donne $u_0 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.
2. On pose $u_0 = 1/2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

Exercice 6 — Étude d'une suite récurrente avec vitesse de convergence

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

1. Montrer que $u_n \in [0, 2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que l'équation $\sqrt{\ell + 1} = \ell$ admet une unique solution ℓ sur $[0, 2]$.
3. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \ell|$$

4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   À partir de quel entier $n \in \mathbb{N}$ peut-on affirmer que u_n est proche de sa limite à 10^{-9} près ?

Exercice 7 — Développement asymptotique d'une suite

On se donne $u_0 \in \mathbb{R}$ et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$$

1. Pour un réel M bien choisi, démontrer que pour tout entier naturel n l'on a $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$.
2. Donner un développement asymptotique de u_n à l'ordre 2.

Exercice 8 — Une série alternée

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}$$

1. En étudiant les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Déterminer la valeur de la limite.

Exercice 9 — Inégalités classiques

Démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad |\sin x| \leqslant |x|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad e^x \geqslant 1 + x$.
3. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\quad \ln(1+x) \leqslant x$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.
5. Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\quad \sin(x) \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$.

Exercice 10 — Étude de la régularité d'une fonction en un point

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}\dfrac{\ln x}{2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 — Fonction définie par une intégrale

Soient deux réels $0 < a < b$. On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{e^t - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle peut être prolongée par continuité en 0.

Exercice 12 — Fonction admettant n racines

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ définie sur un intervalle I qui s'annule en $x_1 < \cdots < x_n$ avec $n \geqslant 1$.
On introduit la fonction φ définie sur I par :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \varphi(t) = f(t) - \mathrm{K}(t - t_1)\cdots(t - t_n)$$

avec K une constante réelle.

1. On fixe $x \in \mathrm{I} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Montrer que l'on peut choisir la constante réelle K pour que $\varphi(x) = 0$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, il existe $\xi \in \mathrm{I}$ tel que :

$$f(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

Exercice 13 — Signe d'une dérivée n-ème

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1[$.
2. Prouver la relation $(1 - x^2) f'(x) = x f(x)$ pour $x \in [0, 1[$.
3. En déduire que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad (1 - x^2) f^{(n+1)}(x) = (2n+1) x f^{(n)}(x) + n^2 f^{(n-1)}(x)$$

4. Justifier que cette dernière relation est encore valable pour $n = 1$.
5. Démontrer que $f^{(n)} \geqslant 0$ sur $[0, 1[$ pour tout entier naturel n.

Exercice 14 — Une suite double d'intégrales

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels. Pour tous entiers $p, q \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale :

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q \, \mathrm{d}x$$

Calculer $\mathrm{I}_{p,q}$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 15 — Intégrales de Wallis

On considère les suites $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{\mathrm{W}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathrm{W}}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que les suites $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{\mathrm{W}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.
2. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n$$
3. En déduire les expressions de W_{2p} et W_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.
4. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n \geqslant \mathrm{W}_{n+1} \geqslant \mathrm{W}_{n+2}$.
6. En déduire la limite du rapport $\dfrac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n}$.
7. Conclure enfin que : $$\mathrm{W}_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Exercice 16 — Équivalent de la somme des puissances k−ème des premiers entiers

On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{p=1}^{n} p^k$$

Donner un équivalent de u_n.

Exercice 17 — Inégalité intégrale

Soit f une fonction définie, continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel K positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \leqslant \mathrm{K} \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

Montrer que f est nulle.

On pourra utiliser la fonction F *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $\mathrm{F}(x) = e^{-\mathrm{K}x} \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$.