

T.D. n°10



EXERCICE 1 ••• CALCUL D'UNE DISTANCE DANS $\mathbb{R}_2[X]$

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire suivant :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad (P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

- Démontrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique de $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
- Donner la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

EXERCICE 2 ••• INÉGALITÉS

Pour $n \geq 1$, on se donne $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = n \end{cases}$$

- On suppose que $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

Étudier le cas d'égalité.

EXERCICE 3 ••• CALCUL D'UN PROJETÉ ORTHOGONAL DANS $\mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ définies sur $[0, \pi]$ et à valeurs réelles. On définit alors :

$$\forall f, g \in E, \quad (f|g) = \int_0^\pi f(t)g(t) dt$$

- Prouver que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E .
- Si $G = \{f \in E, f'' + f = 0\}$, déterminer le projeté orthogonal de la fonction $f : t \in [0, \pi] \mapsto t \in \mathbb{R}$ sur G .

EXERCICE 4 ••• DISTANCE ET PROJECTION ORTHOGONALE DANS $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (M|N) = \text{Tr}({}^tMN)$$

- Vérifier que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Dans cette question, on travaille dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on introduit l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

A. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer F^\perp et en donner une base orthonormée.

B. Calculer la projection orthogonale de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F^\perp .

3. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$$

EXERCICE 5 ••• UNE PROJECTION ORTHOGONALE DE \mathbb{R}^3

On considère p l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Prouver que p est une projection orthogonale et déterminer les sous-espaces F et G tels que p soit la projection orthogonale sur F parallèlement à G .

EXERCICE 6 ••• DISTANCE ET PROJECTION ORTHOGONALE DANS \mathbb{R}^4

On munit \mathbb{R}^4 de sa structure euclidienne canonique et on introduit les deux sous-espaces vectoriels :

$$F = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (0, 2, 0, 3)) \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y - 2t = 0 \text{ et } y + z - 2t = 0\}$$

1. Donner la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 de la projection orthogonale sur F .
2. Calculer la distance de $u = (1, 2, 3, 4)$ à G .

EXERCICE 7 ••• CALCULS DE BORNES INFÉRIEURES

Déterminer la valeur de :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (\sqrt{t} - at - b)^2 dt \quad \text{et} \quad \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt$$

EXERCICE 8 ••• DISTANCE ET PROJECTION ORTHOGONALE DANS $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^1 définies sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On définit alors :

$$\forall f, g \in E, \quad (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E .
2. Montrer que les deux sous-espaces vectoriels de E :

$$V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad W = \{f \in E \cap \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f'' = f\}$$

sont supplémentaires et orthogonaux. Exprimer la projection orthogonale sur W .

3. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on pose maintenant :

$$V_{\alpha, \beta} = \{f \in E, f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

- A. Soit $f \in V_{\alpha, \beta}$. Déterminer la projection orthogonale h de f sur W .
- B. Justifier que :

$$\inf_{f \in V_{\alpha, \beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt = \|h\|^2$$

Calculer cette quantité.