ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

T.D. N°11

EXERCICE 1 ●○○ — ISOMÉTRIE DU PLAN

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, on considère u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$$

Reconnaître et donner les éléments caractéristiques de l'endomorphisme u du plan $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 2 ●○○ — ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, on considère respectivement u, v et w les endomorphismes canoniquement associés aux matrices :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad C = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Reconnaître et donner les éléments caractéristiques des endomorphismes u, v et w de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 3 ●○○ — MATRICES D'ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

Dans chacun des cas suivants, donner la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ce dernier étant muni de sa structure euclidienne orientée canonique.

1. u est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par $(1,2,2)$.
2. u est la rotation d'angle $\pi/2$ et d'axe dirigé par $(0,1,-1)$.
3. u est la rotation d'angle $2\pi/3$ et d'axe dirigé par $(1,1,1)$.

EXERCICE 4 ●●○ — PRODUIT VECTORIEL

On se place dans $\mathbb{R}^3$ que l'on munit de sa structure euclidienne orientée canonique.

1. Démontrer que, pour $(u,v,w) \in (\mathbb{R}^3)^3$, on a $u \wedge (v \wedge w) = (u|w)\,v - (u|v)\,w$.
2. Établir que, pour $(u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2$, on a $\|u \wedge v\|^2 + (u|v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$.
3. On fixe $(u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Résoudre l'équation $u \wedge x = v$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 5 ●○○ — DIAGONALISATIONS DANS UNE BASE ORTHONORMÉE

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.

1. On définit un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ en posant $u((x,y,z)) = (x-z, y-z, -x-y+z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que u est un endomorphisme symétrique. Justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u et en donner une.

2. Diagonaliser la matrice suivante dans une base orthonormée :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 ●●○ Caractérisation des projecteurs orthogonaux

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que si un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ est symétrique alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u^{\perp}$.
2. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est symétrique.

Exercice 7 ●●○ Contraintes matricielles

1. On se donne $M \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $M^p = 0$. Prouver que $M = 0$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t MM = M{}^t M$. On suppose de plus qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $M^p = 0$. Prouver que $M = 0$.

Exercice 8 ●●○ Endomorphisme symétrique

On considère E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a un vecteur unitaire de E et $k \in \mathbb{R}$ un réel. On définit une application f_k sur E en posant :

$$\forall x \in E, \quad f_k(x) = x + k(x|a)a$$

1. Montrer que f_k est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que f_k soit un endomorphisme orthogonal de E. Déterminer alors la nature de f_k.
3. Étudier les éléments propres de f_k.

Exercice 9 ●●○ Inégalités

On se donne $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Prouver que :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$$

2. Établir l'inégalité :

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$$

Exercice 10 ●●● Une décomposition des matrices inversibles

On se donne $A \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.
Justifier qu'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.