ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Éléments de correction du T.D. n°11

Exercice 4 ●●○ — Produit vectoriel

On se place dans $\mathbb{R}^3$ que l'on munit de sa structure euclidienne orientée canonique.

1. Démontrer que, pour $(u,v,w) \in (\mathbb{R}^3)^3$, on a $u \wedge (v \wedge w) = (u|w)v - (u|v)w$.
Si $u = 0$, le résultat est trivial. Sinon, on pose $i = u/\|u\|$ et on considère j un vecteur tel que (i,j) soit une base orthonormée d'un plan contenant i et v. On pose enfin $k = i \wedge j$ de sorte que (i,j,k) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les vecteurs u, v et w se décomposent respectivement sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

On trouve alors que les coordonnées de $u \wedge (v \wedge w)$ sont :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -abe + acd \\ -abf \end{pmatrix} = ad \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} - ab \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

où l'on reconnaît les coordonnées du vecteur $(u|w)v - (u|v)w$.

2. Établir que, pour $(u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2$, on a $\|u \wedge v\|^2 + (u|v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$.
On raisonne de la même façon que pour la question précédente en construisant une base orthonormée directe dans laquelle les calculs se trouvent simplifiés.

3. On fixe $(u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Résoudre l'équation $u \wedge x = v$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.

- Si $(u\,|\,v) \neq 0$, il n'y a pas de solution puisque $(u \wedge x\,|\,u) = 0$.
- Si $u = 0$ et $v \neq 0$, il n'y a pas de solution.
- Si $u \neq 0$ et $v = 0$, l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(u)$.
- Si $u = v = 0$, tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ sont solution.
- On suppose enfin u et v non nuls et orthogonaux. Dans ce cas $(u, v, u \wedge v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et on peut décomposer x dans cette base. En remplaçant x par cette décomposition dans l'équation et en utilisant le résultat de la première question, on trouve l'ensemble des solutions dans ce cas :

$$\mathscr{S} = \left\{ \alpha u - \frac{u}{\|u\|^2} u \wedge v,\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 9 ●●○ — Inégalités

On se donne $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Prouver que :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$$

On fixe $j \in [\![1,n]\!]$. Par l'inégalité de Cauchy – Schwarz appliquée dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, et puisque A est orthogonale, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| = \left| \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right)^{1/2} = \sqrt{n}$$

Ceci valant pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il suffit de sommer cette inégalité sur $j \in [\![1,n]\!]$ pour obtenir le résultat.

2. Établir l'inégalité :

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$$

On note X le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées valent 1. L'inégalité de Cauchy – Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique donne, puisque A est orthogonale et conserve donc la norme :

$$|(\mathrm{AX}\,|\,\mathrm{X})| \leqslant \|\mathrm{AX}\|\,\|\mathrm{X}\| = \|\mathrm{X}\|^2$$

Cela donne le résultat puisque, après calculs :

$$|(\mathrm{AX}\,|\,\mathrm{X})| = \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \qquad \text{et} \qquad \|\mathrm{X}\|^2 = n$$