FONCTIONS VECTORIELLES

T.D. n°12

Exercice 1 — Fonction de norme constante

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que la norme de f est constante sur I.
   Montrer que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \|f(t)\|_2$ est dérivable en tout point $t_0 \in \mathrm{I}$ vérifiant $f(t_0) \neq 0$.

Exercice 2 — Wronskien

Soient deux applications a et b continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on considère l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{E}$$

On se donne y_1 et y_2 deux solutions de (E) et on définit la fonction $\mathrm{W} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{W}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1'(t) \\ y_2(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

1. Montrer que W est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2. En déduire une expression de W.

Exercice 3 — Déplacement d'un point matériel dans le plan

On considère un point matériel en mouvement dans le plan. Sur l'intervalle de temps I, la position de ce point matériel à l'instant $t \in \mathrm{I}$ est donnée par M_t. On suppose qu'à chaque instant le vecteur vitesse du point matériel est orthogonal à la droite (OM_t).
Montrer que la trajectoire du point matériel est sur un cercle centrée en l'origine O.

Exercice 4 — Coordonnées polaires

Soient r et θ des fonctions dérivables sur un intervalle I. On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $u(\alpha)$ le vecteur $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ de $\mathbb{R}^2$. On considère alors la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ définie en coordonnées polaires par :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = r(t)u(\theta(t))$$

1. Montrer que f est dérivable sur I et en donner la dérivée.
2. Si l'on suppose de plus que r et θ sont deux fois dérivables, justifier que f est deux fois dérivable sur I et en donner la dérivée seconde.

Exercice 5 — Déplacement d'un point matériel dans l'espace

On considère un point matériel en mouvement dans l'espace. Sur l'intervalle de temps I, la position de ce point matériel à l'instant $t \in \mathrm{I}$ est donnée par M_t. On suppose qu'à chaque instant le vecteur accélération du point matériel est colinéaire au vecteur $f(t) = \overrightarrow{\mathrm{OM}_t}$.

1. Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante sur I.
2. Si $g \neq 0$ sur I, montrer que la trajectoire du point matériel est plane.

Exercice 6 — Développements limités et allure locale d'arcs plans

Donner un développement limité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ à l'ordre 5 en 0 pour :

$$f : t \mapsto \left(3(\sin t - t), t^3 + t^5\right) \qquad \text{et} \qquad f : t \mapsto \left(\cos t, \cos^2 t\right)$$

En déduire la nature du point M_0 de paramètre $t = 0$ des arcs plans associés et tracer l'allure des courbes paramétrées au voisinage du point M_0.

Exercice 7 — Études d'arcs plans

Dans chacun des cas suivants, faire l'étude complète de l'arc paramétré (I, γ).

1. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}\right) \end{array}$
   (*Folium de Descartes*)
2. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) \end{array}$
   (*Cardioïde*)
3. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\sin t, \frac{\cos^2 t}{2-\cos t}\right) \end{array}$
   (*Bicorne*)
4. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin 2t, \cos 3t) \end{array}$
5. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right) \end{array}$
   (*Astroïde*)
6. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t - \sin t, 1 - \cos t) \end{array}$
   (*Cycloïde*)
7. $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right) \end{array}$
   (*Lemniscate de Bernoulli*)
8. $\gamma : \begin{array}{ccc}]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\cos^2 t + \ln(\sin t), \sin t \cos t\right) \end{array}$