FONCTIONS VECTORIELLES

Éléments de correction du T.D. n°12

Exercice 3 — Déplacement d'un point matériel dans le plan

On considère un point matériel en mouvement dans le plan. Sur l'intervalle de temps I, la position de ce point matériel à l'instant $t \in \mathrm{I}$ est donnée par M_t. On suppose qu'à chaque instant le vecteur vitesse du point matériel est orthogonal à la droite (OM_t).
Montrer que la trajectoire du point matériel est sur un cercle centrée en l'origine O.
Soit $t \in \mathrm{I}$, on pose $\mathrm{M}_t = (x(t), y(t))$ où x et y sont les fonctions coordonnées de M. L'hypothèse donne que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, le vecteur M_t est orthogonal à M'_t, c'est-à-dire $x(t)x'(t)+y(t)y'(t) = 0$. Ainsi, en primitivant, on obtient l'existence d'une constante telle que $x^2 + y^2 = \mathrm{C}$, ce qui donne bien que la trajectoire est sur un cercle d'origine O et de rayon $\sqrt{\mathrm{C}}$.

Exercice 4 — Coordonnées polaires

Soient r et θ des fonctions dérivables sur un intervalle I. On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $u(\alpha)$ le vecteur $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ de $\mathbb{R}^2$. On considère alors la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ définie en coordonnées polaires par :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = r(t)u(\theta(t))$$

1. Montrer que f est dérivable sur I et en donner la dérivée.
   Les fonctions coordonnées de f, si on les note x et y sont :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \qquad \text{et} \qquad y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$$

   Les fonctions r et θ étant dérivables sur I, x et y le sont aussi et donc f aussi. On obtient alors :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f'(t) = (x'(t), y'(t)) = (r'(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\theta'(t)\sin(\theta(t)), r'(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\theta'(t)\cos(\theta(t)))$$

   Cela peut être abrégé en $f' = r'u(\theta) + r\theta' u'(\theta)$, ce qui donne la formule de la vitesse en coordonnées polaires.
2. Si l'on suppose de plus que r et θ sont deux fois dérivables, justifier que f est deux fois dérivable sur I et en donner la dérivée seconde.
   Même type de justifications et de calculs que pour la question précédente.

Exercice 5 — Déplacement d'un point matériel dans l'espace

On considère un point matériel en mouvement dans l'espace. Sur l'intervalle de temps I, la position de ce point matériel à l'instant $t \in \mathrm{I}$ est donnée par M_t. On suppose qu'à chaque instant le vecteur accélération du point matériel est colinéaire au vecteur $f(t) = \overrightarrow{\mathrm{OM}_t}$.

1. Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante sur I.
   L'énoncé introduit le vecteur accélération, ce qui sous-entend que f est deux fois dérivable. Par le cours, f et f' étant alors dérivables, la fonction g l'est aussi avec :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad g'(t) = f'(t) \wedge f'(t) + f(t) \wedge f''(t)$$

   Si $t \in \mathrm{I}$, on a évidemment $f'(t) \wedge f'(t) = 0$ par propriété du produit vectoriel et on a $f(t) \wedge f''(t)$ par hypothèse. Ainsi $g' = 0$ sur I et g est constante.

2. Si $g \neq 0$ sur I, montrer que la trajectoire du point matériel est plane.
Puisque g est constante d'après la question précédente et non nulle par hypothèse, on note n le vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $g = n$ sur I. On considère le plan $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}(n)^\perp$. Montrons que f est à valeurs dans P. Soit $t \in \mathrm{I}$, montrons que $f(t) \in \mathrm{P}$. Cela équivaut à $f(t) \perp n$ soit $f(t) \perp (f(t) \wedge f'(t))$, ce qui est bien le cas par propriété du produit vectoriel. Ainsi le mouvement du point matériel est plan, inclus dans le plan P.