ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

T.D. n°13

Exercice 1 ●○○ — Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Résoudre les trois équations différentielles suivantes sur l'intervalle I spécifié :

1. $y' + y = e^t + \sin t$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
2. $2ty' - 3y = \sqrt{t}$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$.
3. $(1-t^2)y' - 2ty = 2t$ avec $\mathrm{I} =]-1,1[$, $\mathrm{I} =]-\infty,-1[$, $\mathrm{I} =]1,+\infty[$ puis $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Exercice 2 ●○○ — Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Résoudre les deux équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 3y' + 2y = \sin t$
2. $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} t$

Exercice 3 ●○○ — Systèmes différentiels d'ordre 1

Résoudre les quatre systèmes différentiels suivants sur $\mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2e^t \\ y' = 4x - 3y + e^t \\ z' = -2x + y - 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = -x + y - z \\ z' = x + 2y \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = (2-t)x + (t-1)y \\ y' = 2(1-t)x + (2t-1)y \end{cases}$

Exercice 4 ●●○ — Une équation différentielle linéaire d'ordre 2

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$4ty'' + 2y' - y = 0 \tag{E}$$

1. Déterminer une solution y_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ développable en série entière et vérifiant $y_0(0) = 1$.
2. Sur $\mathbb{R}_+^*$, exprimer y_0 en fonction de la fonction ch.
3. En devinant une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, terminer la résolution de (E) sur cet intervalle.
4. Sur $\mathbb{R}_-^*$, exprimer y_0 en fonction de la fonction cos.
5. En devinant une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$, terminer la résolution de (E) sur cet intervalle.

Exercice 5 ●○○ — Une équation différentielle linéaire d'ordre 2

Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(2t+1)y''+(4t-2)y'-8y=0$$

On cherchera une solution polynomiale et une solution de la forme $t\mapsto e^{at}$ pour $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 6 ●●○ — Séries entières et équations différentielles linéaires d'ordre 2

1. Trouver par développement en série entière l'unique solution du problème de Cauchy suivant sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''+2ty'+2y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

2. Par développement en série entière, résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(t^2+1)y''+4ty'+2y=1$$

Exercice 7 ●●○ — Résolution par changement de variable

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ les deux équations différentielles suivantes en réalisant le changement de variable $t=e^u$:

1. $t^2y''+y=0$
2. $t^2y''+3ty'+4y=\cos(\ln t)$

Exercice 8 ●●○ — Résolution par changement de fonction

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante en réalisant le changement de fonction $z=t^2y$:

$$t^2y''+4ty'-(t^2-2)y=e^t$$

Exercice 9 ●●○ — Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 3

Résoudre l'équation différentielle suivante en se ramenant à un système différentiel d'ordre 1 :

$$y'''-5y''+7y'-3y=0$$

Exercice 10 ●●● — Une équation fonctionnelle

On cherche l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues et vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$ suivante :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)+\int_0^t (x+t)f(t-x)\,\mathrm{d}x=1 \qquad (\mathscr{P})$$

1. On se donne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et vérifiant $(\mathscr{P})$.
   a. On définit la fonction g suivante :
   $$g:t\mapsto\int_0^t (x+t)f(t-x)\,\mathrm{d}x$$
   Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner g' et g''.
   b. En déduire que f vérifie l'équation différentielle $y''+ty'+3y=0$ ainsi que les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.
   c. En déduire l'expression de f à l'aide d'un développement en série entière.
2. Conclure quant au problème posé.