ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Éléments de correction du T.D. n°13

Exercice 4 ●●○ — Une équation différentielle linéaire d'ordre 2

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$4ty'' + 2y' - y = 0 \tag{E}$$

1. **Déterminer une solution y_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ développable en série entière et vérifiant $y_0(0) = 1$.**
   On se donne une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$, on peut dériver terme à terme la somme et remplacer dans l'équation différentielle (E). Après changements d'indice, par unicité du développement en série entière, on obtient la relation :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n = 0$$
   On trouve alors facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $a_n = a_0/(2n)!$ pour $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} t^n/(2n)!$ est de rayon de convergence infini grâce, par exemple, au critère de d'Alembert et sa fonction somme y_0, bien définie sur $\mathbb{R}$, vérifie l'équation différentielle puisque les calculs ci-dessus ont été faits par équivalence. On a de plus $y_0(0) = 1$.
2. **Sur $\mathbb{R}_+^*$, exprimer y_0 en fonction de la fonction ch.**
   Soit $t > 0$. On a :
   $$y_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(\sqrt{t})$$
3. **En devinant une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, terminer la résolution de (E) sur cet intervalle.**
   La fonction $t \mapsto \mathrm{ch}(\sqrt{t})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et on peut prouver que $t \mapsto \mathrm{sh}(\sqrt{t})$ l'est aussi. Ces deux fonctions formant une famille libre et l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, qui peut être mise sous forme résolue, étant de dimension 2, ces deux fonctions forment une base de l'ensemble des solutions.
4. **Sur $\mathbb{R}_-^*$, exprimer y_0 en fonction de la fonction cos.**
   Pour $t < 0$, on a $y_0(t) = \cos(\sqrt{-t})$.
5. **En devinant une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$, terminer la résolution de (E) sur cet intervalle.**
   La fonction $t \mapsto \cos(\sqrt{-t})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et on peut prouver que $t \mapsto \sin(\sqrt{-t})$ l'est aussi. On conclut de la même façon que précédemment.

Exercice 9 ●●○ — Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 3

Résoudre l'équation différentielle suivante en se ramenant à un système différentiel d'ordre 1 :

$$y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$$

On pose :

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

de sorte que l'équation différentielle étudiée équivaut au système différentiel $X' = AX$. On tente de diagonaliser la matrice A pour suivre la méthode du cours mais elle n'est pas diagonalisable puisque son spectre est $\mathrm{sp}(A) = \{1, 3\}$ et que $\dim E_1 = \dim E_3 = 1$. Elle est cependant trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé et on peut montrer que A est semblable à la matrice T suivante :

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si P désigne une matrice inversible vérifiant $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{T}$, on pose $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ et on démontre que Y vérifie $\mathrm{Y}' = \mathrm{TY}$. On résout ce système différentiel triangulaire et on conclut en redonnant $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$. On trouve après calculs qu'il existe des des constantes $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = ae^{3t} + be^t + cte^t$$

Exercice 10 ●●● — Une équation fonctionnelle

On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$ suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) + \int_0^t (x+t) f(t-x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad (\mathscr{P})$$

1. On se donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant $(\mathscr{P})$.

a. On définit la fonction g suivante :

$$g : t \mapsto \int_0^t (x+t) f(t-x)\,\mathrm{d}x$$

Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner g' et g''.
Avec le changement de variable $u = t - x$, on prouve que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \int_0^t (2t - u) f(u)\,\mathrm{d}u = 2t \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^t u f(u)\,\mathrm{d}u$$

Puisque les fonctions $f : u \mapsto f(u)$ et $h : u \mapsto u f(u)$ sont continues, les fonctions $\mathrm{F} : t \mapsto \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\mathrm{H} : t \mapsto \int_0^t u f(u)\,\mathrm{d}u$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivées égales à f et h respectivement d'après le théorème fondamental de l'analyse. Ainsi g est de classe $\mathscr{C}^1$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = 2\mathrm{F}(t) + 2t f(t) - t f(t)$$

La relation $(\mathscr{P})$ donne $f = 1 - g$ de sorte que f est également $\mathscr{C}^1$ avec $f' = -g'$. On obtient alors que g' est de classe $\mathscr{C}^1$, c'est-à-dire que g est de classe $\mathscr{C}^2$, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) = 2f(t) + 2f(t) + 2t f'(t) - f(t) - t f'(t) = 3f(t) + t f'(t)$$

b. En déduire que f vérifie l'équation différentielle $y'' + ty' + 3y = 0$ ainsi que les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
Maintenant que g est de classe $\mathscr{C}^2$, on a $f = 1 - g$ de classe $\mathscr{C}^2$ également avec $f'' = -g''$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) = -g''(t) = -3f(t) - t f'(t)$$

Ainsi f est solution de $y'' + ty' + 3y = 0$ et on a $f(0) = 1$ grâce à $(\mathscr{P})$ et $f'(0) = -g'(0) = 0$.

c. En déduire l'expression de f à l'aide d'un développement en série entière.
On se donne une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$ de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Sur l'intervalle ouvert de convergence $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, on peut dériver terme à terme la somme et remplacer dans l'équation différentielle. Après changements d'indice, par unicité du développement en série entière, on obtient une relation sur les coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que l'on peut résoudre avec les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. On trouve alors que la somme S de la série entière s'écrit $\mathrm{S}(t) = (1 - t^2)\exp(-t^2/2)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On vérifie réciproquement que cette fonction est bien solution du problème de Cauchy. Puisqu'il y a unicité sur ce problème de Cauchy, on a $\mathrm{S} = f$.

2. Conclure quant au problème posé.
On a prouvé que si f est solution de $(\mathscr{P})$ alors $f(t) = (1 - t^2)\exp(-t^2/2)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On vérifie réciproquement que cette fonction est bien continue et vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.