ESPACES PROBABILISÉS

T.D. n°14

Exercice 1 ●○○ Manipulations des événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Écrire avec les opérations ensemblistes (union, intersection et complémentaire) les événements suivants :

(1) L'un au moins des événements A, B et C est réalisé.
(2) L'un et seulement l'un des événements A et B est réalisé.
(3) Les deux événements A et B sont réalisés et C ne l'est pas.
(4) Tous les événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réalisés.
(5) L'un au moins des événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réalisé.
(6) Une infinité d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réalisés.
(7) Seul un nombre fini d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réalisés.
(8) Tous les événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réalisés à partir d'un certain rang.

Exercice 2 ●○○ Manipulation des techniques de calculs de probabilité

1. Un logiciel informatique permet de tirer un nombre entier naturel de manière aléatoire. Pour $i \in \mathbb{N}$, la probabilité que l'ordinateur renvoie le nombre i est $1/2^{i+1}$. Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
   On lance une fois ce programme, calculer la probabilité d'obtenir un nombre impair.

2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire une à une n boules dans l'urne. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches dans le cas d'un tirage sans remise ?
   Et dans le cas d'un tirage avec remise ?

3. Un logiciel informatique permet de tirer un nombre entier naturel de manière aléatoire. Pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité que l'ordinateur renvoie le nombre k est $1/(k!e)$. Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
   Après avoir tiré un nombre aléatoire k avec ce programme, on tire une boule dans une urne composée de k boules blanches et une boule noire. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ?

Exercice 3 ●○○ n clefs, une serrure

On dispose d'un trousseau de n clefs indistinguables pour ouvrir une serrure.

1. L'expérience a lieu dans le noir et, à chaque essai, on utilise une clef choisie au hasard.
   Pour $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité d'ouvrir la serrure au $p-$ème essai.

2. L'expérience a lieu le jour et on essaie donc maintenant successivement toutes les clefs.
   Pour $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité d'ouvrir la serrure au $p-$ème essai.

Exercice 4 ●●○ Placement dans la cabine de l'avion

Un avion comporte $n \geqslant 2$ sièges. On considère n passagers, chacun ayant une place réservée.

- Le premier passager qui arrive est distrait et s'installe à une place choisie au hasard.
- Les passagers suivants, lorsqu'ils arrivent, s'installent à leur place si celle-ci est disponible et, dans le cas contraire, choisissent une place au hasard parmi les places encore libres.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note p_k la probabilité que le $k-$ème passager s'installe à sa place.

1. Établir que : $$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad p_k = \frac{1}{k}\left(1+\sum_{i=2}^{k-1} p_i\right)$$

2. En utilisant la relation précédente aux rang k et $k+1$, montrer que $p_k = p_{k+1}$ pour $k \in [\![1,n-1]\!]$.
En déduire p_k pour $k \in [\![1,n]\!]$.

Exercice 5 ●●○ — Transmission d'un message

On considère une suite de relais qui transmettent un message binaire (0 ou 1). Chaque relais est noté R_n, $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité pour que le relais R_n transmette correctement le message au suivant vaut $p \in]0,1[$, et la probabilité qu'il le transforme en son opposé est $1-p$. On note p_n la probabilité pour que le message arrivé au relais R_n soit identique au message arrivé en R_1.

1. Établir, pour $n \geqslant 1$, une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n puis en déduire la valeur de p_n.

2. Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$? Interprétation ?

Exercice 6 ●●○ — Lancer de pièce et tirages dans une urne

On lance une seule fois une pièce équilibrée puis on effectue des tirages successifs dans une urne, contenant initialement une boule blanche et une boule noire, de la façon suivante :

- On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ;
- On rajoute ensuite une boule blanche si on a obtenu pile et une boule noire si on a obtenu face ;
- On recommence pour un tirage suivant.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $k-$ème tirage.

2. Sachant que l'on a tiré une boule blanche au $k-$ème tirage, calculer la probabilité d'avoir obtenu pile.

3. Calculer la probabilité d'avoir obtenu k boules blanches lors des k premiers tirages.

Exercice 7 ●●● — Schéma *Pile* – *Pile* dans une série de *Pile* ou *Face*

On joue à *Pile* ou *Face* avec une pièce équilibrée. Pour $n \geqslant 1$, on s'intéresse à l'événement E_n : « Lors des n premiers lancers, il n'a pas été observé deux *Pile* consécutifs » et on note $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{E}_n)$.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter le résultat.

Exercice 8 ●●● — La ruine du joueur

Deux joueurs A et B s'affrontent dans une succession de parties indépendantes. À chaque partie, le joueur A gagne avec probabilité $p \in]0,1[$ et le joueur B gagne avec probabilité $q = 1-p$. À l'issue de chaque partie, le gagnant reçoit un euro du perdant. Le jeu s'arrête si l'un des joueurs est ruiné.
Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $\mathrm{R}(a,b)$ la probabilité que A gagne le jeu sous l'hypothèse que les joueurs A et B ont débuté le jeu avec a et b comme fortunes respectives.

1. Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, établir une relation entre $\mathrm{R}(a,b)$, $\mathrm{R}(a+1,b-1)$ et $\mathrm{R}(a-1,b+1)$.

2. Dans cette question, on suppose pour simplifier les calculs que $p = q = 1/2$.

   a. En utilisant la relation de récurrence précédente, obtenir une expression de $\mathrm{R}(a,b)$.

   b. Justifier que le jeu s'arrête presque sûrement en un nombre fini de parties.

3. Reprendre la question précédente dans le cas $p \neq q$.