VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

T.D. n°15

Exercice 1 ●●○ — Manipulation de lois géométriques

On se donne X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Calculer $P(X = Y)$ puis $P(X < Y)$.
2. Déterminer la loi de la variable $D = |X - Y|$.
3. Donner la loi de $M = \min(X, Y)$.
4. Déterminer la loi conjointe de D et M et en déduire que D et M sont indépendantes.

Exercice 2 ●●○ — Temps d'attente sur des lancers de pièce

On considère deux pièces dont la première tombe sur Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et la seconde avec probabilité $q = 1 - p$. On lance la première pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile et l'on compte X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir ce premier Pile. On compte ensuite Y le nombre de Pile obtenus après avoir lancé la seconde pièce X fois.

1. Établir par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$, le résultat suivant :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{k=j}^{+\infty} \binom{k}{j} x^{k-j} = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}$$

2. Donner la loi de X.
3. Calculer $P(Y = 0)$ puis $P(Y = j)$ pour $j \in \mathbb{N}^*$.
4. Calculer, si elle existe, l'espérance de Y.
5. Montrer que la loi de Y est la loi d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi géométrique et une loi de Bernoulli de même paramètre p' que l'on déterminera.
   Retrouver ainsi $E(Y)$ et calculer $V(Y)$.

Exercice 3 ●●○ — Le problème du collectionneur

Un enfant collectionne des images qu'il trouve dans des tablettes de chocolat. La collection complète est constituée de N images numérotées de 1 à N.
Pour $n \geqslant 1$, on note X_n le numéro de l'image obtenue dans la n−ème tablette de chocolat achetée. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$.
Pour $k \in [\![1,N]\!]$, on notera T_k le nombre de tablettes que l'enfant devra acheter pour avoir k images différentes. On s'intéresse dans la suite à T_N, le nombre de tablettes que l'enfant doit acheter pour avoir la collection complète d'images.

1. Calculer $P(T_2 - T_1 = p)$ pour $p \geqslant 1$.
2. Soit $k \in [\![1,N-1]\!]$. Calculer $P(T_{k+1} - T_k = p)$ pour $p \geqslant 1$.
3. En déduire $E(T_{k+1} - T_k)$ pour $k \in [\![1,N-1]\!]$.
4. Calculer alors $E(T_N)$ et en donner un équivalent lorsque N tend vers $+\infty$.

Exercice 4 ●●○ — Temps de retour à l'envoyeur

On fixe $N \geqslant 1$ et on considère $N+1$ joueurs qui jouent à la balle. Au départ, le joueur 1 a la balle. Chaque joueur lance la balle à l'un des autres joueurs de façon équiprobable.
Pour $n \geqslant 1$, on note X_n le numéro du joueur qui reçoit la balle au $n-$ème lancer et on convient que $X_0 = 1$. On introduit la variable Y égale au nombre de lancers nécessaires pour que le joueur 1 récupère la balle pour la première fois.

1. On fixe $\ell \in [\![1, N+1]\!]$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = \ell) = \frac{1}{N}(1 - P(X_n = \ell))$$

2. Pour $n \geqslant 0$ et $\ell \in [\![1, N+1]\!]$, calculer $P(X_n = \ell)$ et en déduire la loi de X_n.
3. Déterminer la loi de Y et donner, si elles existent, son espérance et sa variance.

Exercice 5 ●●○ — Conditionnement Binomial

Une secrétaire effectue $n \geqslant 2$ appels téléphoniques vers n personnes distinctes. Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Déterminer la loi de X et donner, si elles existent, son espérance et sa variance.
2. Après ses n recherches, la secrétaire retente sa chance auprès des correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre la première fois. Soient Y le nombre de correspondants joints durant la deuxième vague d'appels et Z le nombre de correspondants joints au total.
   - **a.** Pour $k \in [\![0, n]\!]$, donner la loi de conditionnelle de Y sachant $(X = k)$.
   - **b.** En déduire la loi conjointe de (X, Y) puis la loi de Y.
   - **c.** Montrer que Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
     Quelle est la probabilité que la secrétaire ait joint tous ses correspondants en deux vagues d'appels ?

Exercice 6 ●●○ — Conditionnement Poissonnien

Le nombre N de blessés suite à un accident de ski arrivant chaque jour aux urgences durant la saison de ski suit une loi de Poisson de moyenne $\lambda > 0$. On observe que les blessés ont une probabilité $p \in]0,1[$ d'être pris en charge immédiatement. On notera X le nombre de blessés pris en charge immédiatement et Y le nombre de blessés pris en charge ultérieurement.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$.
2. En déduire la loi de X, donner son espérance et sa variance.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 ●●● — Tirages de boules dans une urne

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On prélève une boule au hasard dans l'urne, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec $c \in \mathbb{N}^*$ boules de la même couleur. On répète n fois ce processus.
On considère, pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i la variable qui vaut 1 si on obtient une boule blanche au $i-$ème tirage et 0 sinon.

On définit enfin :
$$\forall p \in [\![1, n]\!], \quad Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) et en déduire la loi de X_2 et son espérance.
4. Donner $Z_p(\Omega)$.
5. On se donne $p \leqslant n-1$.

A. Pour $k \in Z_p(\Omega)$, déterminer $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)$.

B. Montrer que :

$$P(X_{p+1}=1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}$$

6. Pour $p \in [\![1,n]\!]$, en déduire que X_p suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Exercice 8 ●●● Longueurs de séries

On considère une pièce pour laquelle, à chaque lancer, l'apparition de *Pile* a la probabilité $p \in]0,1[$ et celle de *Face* la probabilité $q = 1-p$. On lance cette pièce une infinité de fois et on s'intéresse aux longueurs des séries de *Pile* ou *Face* obtenues. Par exemple, avec des notations évidentes, si les lancers donnent les résultats :

$$\text{PPFFFFFFPPFF}\cdots$$

alors la première série est PP, de longueur 2 ; et la deuxième série est FFFFFF, de longueur 6.
Dans la suite, on note L_1 et L_2 les longueurs des première et deuxième séries.

1. Donner la loi de L_1. Que devient cette loi si $p = 1/2$?
2. Déterminer, si elle existe, l'espérance de L_1 et montrer qu'elle est supérieure ou égale à 2 ; étudier le cas d'égalité.
3. Calculer, si elle existe, la variance de L_1 et en déduire, avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, une valeur ℓ telle que, avec une probabilité d'au moins 0,99, L_1 est inférieure à ℓ.
4. Déterminer la loi du couple (L_1, L_2).
5. En déduire la loi de L_2.
6. Calculer, si elle existe, l'espérance de L_2.
7. Déterminer à quelle condition les variables L_1 et L_2 sont indépendantes.
   Dans ce cas, déterminer la loi de $L_1 + L_2$ et donner une interprétation de ce résultat.