COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES

T.D. N°2

EXERCICE 1 — ÉTUDE DE SÉRIES

Déterminer les natures des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\ln n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^{\alpha}}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ $(\alpha\in\mathbb{R})$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(2\ln(n^3+1)-3\ln(n^2+2)\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln n}{n-\ln n}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$ $(a\in\mathbb{R}^*)$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos n}$
12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^a n!e^n}{(n+1)^n}$ $(a\in\mathbb{R})$
13. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n!)^2x^n}{(2n)!}$ $(x\in\mathbb{R})$
14. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+n^{1/3}}\right)$
15. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}+(-1)^n n^{\beta}}$ $(\alpha\neq\beta\in\mathbb{R})$
16. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$
17. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2-k^2}$
18. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^n}{2^{n^2}}$

EXERCICE 2 — ÉTUDE DE SÉRIES ET CALCULS DE SOMMES

Déterminer les natures des séries suivantes et en calculer la somme en cas de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2-1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos(n\theta)}{2^n}$ $(\theta\in\mathbb{R})$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{n^2}\right)$

EXERCICE 3 — ÉTUDE D'UNE SÉRIE

On se donne $a,b\in\mathbb{R}$ deux réels et on pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$$

1. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la série de terme général u_n converge.
2. Pour les valeurs de a et b obtenues, calculer la somme de cette série.
3. Toujours dans le cas de convergence, trouver un équivalent du reste d'ordre n.

EXERCICE 4 — PREUVE DE LA FORMULE DE STIRLING

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n=\frac{e^n n!}{\sqrt{n}n^n}\quad\text{et}\quad u_n=\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)$$

1. Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente.

2. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

3. En utilisant les intégrales de Wallis, démontrer que $C = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 5 — Vitesse de convergence / divergence pour les séries de Riemann

On se donne $\alpha > 0$ et on considère la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Dans le cas $\alpha \in]0,1]$, donner un équivalent de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

2. Dans le cas $\alpha \in]1,+\infty[$, donner un équivalent du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 6 — Termes généraux récurrents ou définis implicitement

1. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en donnant $u_0 \in]0,1[$ et :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

   a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

   b. Étudier les séries $\sum_{n \geqslant 0} u_n^2$ et $\sum_{n \geqslant 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en donner la somme en cas de convergence.

   c. En déduire la nature de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

2. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en donnant $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$$

   a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

   b. Étudier la nature de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

3. On définit une fonction f sur $]0,+\infty[$ en posant :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \operatorname{Arctan}(x) - \ln(x)$$

   a. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n\pi$ admet une unique solution que l'on note u_n.

   b. Étudier la nature de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

Exercice 7 — Séries de Bertrand

On se donne α et β deux réels et on considère la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. Étudier la nature de la série dans le cas $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

2. Poursuivre l'étude avec le cas $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

3. Enfin, traiter le cas $\alpha = 1$.

Exercice 8 — Manipulation sur les séries de Riemann

Soit $\alpha > 1$. Dans la suite, on note S la somme de la série de Riemann convergente $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Pour les séries suivantes, déterminer leur nature et donner, en cas de convergence, l'expression de leur somme en fonction de S :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n)^\alpha} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$$

Exercice 9 — Convergence et somme d'une série

On s'intéresse à la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1. Démontrer que la série converge.
2. Simplifier l'expression $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.
3. En déduire la somme de la série.

Exercice 10 — Exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

1. Justifier que cette définition est légitime.
2. Démontrer que :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

Exercice 11 — Approximation de la somme d'une série

1. Justifier que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1}$ convergent.
2. Donner, sans la calculer, une approximation à 10^{-3} près de leurs sommes.

Exercice 12 — Règle de Raabe – Duhamel

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Démontrer qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{C} n^\alpha$.
2. Pour a et b dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$, on pose :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$$

   Étudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 13 — Étude d'une suite grâce à une série

Soit $\alpha \in \,]0,+\infty[$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 > 0$ et :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 14 — Un exemple de transformation d'Abel

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. On souhaite établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n}$.

On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$s_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Simplifier l'expression de s_n lorsque $n \geqslant 1$ et en déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k} = \frac{s_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

3. Conclure.