RÉVISIONS D'ALGÈBRE

T.D. N°3

EXERCICE 1 — PUISSANCES DE MATRICES

1. On désigne par A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- **A.** Exprimer A^3 en fonction de A^2 et A.
- **B.** Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(a_k, b_k) \in \mathbb{K}^2$ tel que $A^k = a_k A + b_k A^2$.
- **C.** Déterminer a_k puis b_k en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$.
  En déduire les puissances A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On désigne par B la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- **A.** On introduit J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. Donner J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- **B.** En exprimant B en fonction de J, calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2 — ESPACE VECTORIEL DES FONCTIONS

On se place sur le $\mathbb{R}$−espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Étudier la liberté de la famille $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ où, pour $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = |x - k|$$

2. Soient $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ des réels. Étudier la liberté de la famille $(h_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ où, pour $k \in [\![1, n]\!]$, h_k est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_k(x) = e^{\lambda_k x}$$

3. On définit $F = \{ f \in E,\ f \text{ bornée} \}$ et $G = \{ f \in E,\ f(0) = 0 \}$.
Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $E = F + G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

EXERCICE 3 — ESPACE VECTORIEL DES POLYNÔMES

On se place sur le $\mathbb{K}$−espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus $n \geqslant 1$.

1. On fixe $a, b \in \mathbb{K}$, montrer que l'ensemble des polynômes de E dont a et b sont des racines est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base et la dimension.

2. On définit $F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in E,\ \deg(P) \leqslant 1\}$.
Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Démontrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 4 — Ensemble des suites 3−périodiques

On se place sur le $\mathbb{K}$−espace vectoriel $E = \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit F le sous-ensemble de E formé par les suites 3−périodiques, c'est-à-dire :

$$F = \{u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_n\}$$

1. Établir que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. On introduit l'application $\varphi : F \to \mathbb{K}^3$ définie par :

$$\forall u \in F, \quad \varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$$

   Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de F.
3. Déterminer une base de F.
   On pourra rechercher les suites géométriques de F.

Exercice 5 — Dérivation et intégration par l'algèbre

Dans le $\mathbb{R}$−espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on introduit le sous-ensemble :

$$F = \left\{x \mapsto (ax+b)e^{2x} + (cx+d)e^{-2x},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base $\mathscr{B}$ et la dimension.
2. On définit $\varphi : f \in E \mapsto f'$.
   - a. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
   - b. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$. L'endomorphisme φ est-il bijectif?
3. Déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathscr{B}$.
4. Justifier que M est inversible puis calculer M^{-1}.
   En déduire une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 3xe^{2x} - (5x-1)e^{-2x}$$

5. Déterminer l'expression de M^n pour $n \geqslant 1$.
   En déduire la dérivée n−ème de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = (2x-5)e^{2x} + 4xe^{-2x}$$

Exercice 6 — Un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$

On se place sur le $\mathbb{K}$−espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n. On fixe $a \in \mathbb{K}$ et on définit l'application φ sur E en posant :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = (X-a)(P'(X) + P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Calculer $(\varphi(P))''$ pour $P \in E$ et en déduire $\dim \operatorname{Ker}\varphi \leqslant 3$.
3. Démontrer que $\varphi(P)$ est divisible par $(X-a)^3$ pour tout $P \in E$.
4. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

Exercice 7 — Interpolation de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts. On introduit pour la suite l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{array}$$

1. Démontrer que l'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. En déduire que pour $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.
3. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme :

$$\mathrm{L}_i(\mathrm{X}) = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \frac{\mathrm{X} - a_k}{a_i - a_k}$$

Démontrer que $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

4. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Donner la décomposition de P dans la base $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n)$ de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 8 — Endomorphismes vérifiant $f^3 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme vérifiant $f^3 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

1. Montrer que f est inversible et donner f^{-1}.
2. Prouver que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_\mathrm{E})$.
3. En déduire que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_\mathrm{E})$.
4. Déterminer explicitement la décomposition d'un vecteur x de E sur cette somme directe.

Exercice 9 — Noyaux et images itérés, nilpotence

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme. On définit les *noyaux et images itérés* de f en posant :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{K}_p = \mathrm{Ker}\, f^p \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_p = \mathrm{Im}\, f^p$$

1. Pour $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{K}_p \subset \mathrm{K}_{p+1}$ et que $\mathrm{I}_{p+1} \subset \mathrm{I}_p$.
2. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que $\mathrm{K}_r = \mathrm{K}_{r+1}$.
3. Prouver qu'alors $\mathrm{I}_r = \mathrm{I}_{r+1}$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{K}_r = \mathrm{K}_{r+p} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_r = \mathrm{I}_{r+p}$$

4. Démontrer que $\mathrm{E} = \mathrm{K}_r \oplus \mathrm{I}_r$.
5. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^\ell = 0$ et $f^{\ell-1} \neq 0$.
   a. Grâce à ce qui précède, montrer que $\ell \leqslant n$.
   b. Démontrer qu'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{\ell-1}(x_0))$ soit une famille libre. Retrouver alors que $\ell \leqslant n$.

Exercice 10 — Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$

Soient E et F des $\mathbb{K}$−espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E. On définit :

$$\mathrm{H} = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}),\ \mathrm{G} \subset \mathrm{Ker}\, u\}$$

Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 11 — Projecteurs et symétries

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel. On rappelle les définitions suivantes :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

- On appelle *projection sur* F *parallèlement à* G l'unique endomorphisme p de E tel que :

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{G}, \quad p(x) = 0$$

- On appelle *symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G l'unique endomorphisme s de E tel que :

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{G}, \quad s(x) = -x$$

- On dira que $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est une *projection* ou un *projecteur* s'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E tels que p soit la projection sur F parallèlement à G.
- On dira que $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est une *symétrie* s'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E tels que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1. Montrer que $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
Dans ce cas, prouver que $\mathrm{E} = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

2. Montrer que $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.
Dans ce cas, prouver que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et que s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$.

3. Soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un projecteur. On pose $q = \mathrm{id}_\mathrm{E} - p$. Montrer que q est un projecteur et spécifier $\operatorname{Ker} q$ et $\operatorname{Im} q$ en fonction de $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$.

4. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$ tels que $(f - a\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \circ (f - b\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) = 0$.

On pose :
$$p = \frac{1}{b-a}(f - a\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$$

a. Montrer que p et q sont des projecteurs de E vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer f^n en fonction de a, b et p, q.

Exercice 12 — Matrices à diagonale dominante

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 13 — Centres de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note M sa matrice dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

a. Comparer M et la matrice de u dans la base $\mathscr{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$.

b. Comparer M et la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'' = (e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$.

c. Déterminer tous les endomorphismes de E dont les matrices sont indépendantes de la base choisie.

2. En déduire les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

3. Sans utiliser le résultat précédent, déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pourra travailler avec les matrices élémentaires $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.