COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

T.D. N°4

EXERCICE 1 — UNE AUTRE CARACTÉRISATION DES SOMMES DIRECTES

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad E_k \cap \left(\sum_{j \neq k} E_j \right) = \{0\}$$

EXERCICE 2 — ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME DE $\mathbb{K}[X]$

On se place sur le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$. On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall P \in E, \quad u(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

1. Déterminer $\deg(u(P))$ en fonction de $\deg(P)$. Déterminer $\operatorname{Ker} u$.
2. On pose $Q_0 = 1$ et $Q_n = u(X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est un hyperplan de E.
4. On considère la forme linéaire φ définie sur E par :
$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = \int_0^1 P(t)\, dt$$
Prouver que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} \varphi$.
5. Déterminer un supplémentaire de l'hyperplan $\operatorname{Im} u$ dans E.

EXERCICE 3 — ENSEMBLE DES MATRICES DIAGONALES

On note $\Delta_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\Delta_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit.
Donner sa dimension.
2. Soit $A \in \Delta_n$ de coefficients diagonaux deux à deux distincts.
   a. Montrer que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une base de $\Delta_n(\mathbb{K})$.
   b. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $B \in \Delta_n$ si et seulement si $AB = BA$.

EXERCICE 4 — SOUS-ESPACES STABLES

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme.

1. On suppose que toute droite vectorielle de E est stable par u. Montrer que u est une homothétie.
2. On suppose que $n \geqslant 3$ et que tout plan vectoriel de E est stable par u. Montrer que u est une homothétie.
3. Soit $1 \leqslant p \leqslant n-1$. On suppose que tous les sous-espaces vectoriels de dimension p de E sont stables par u. Montrer que u est une homothétie.

4. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle de E et $\mathrm{H} = \operatorname{Ker} \varphi$ l'hyperplan associé.
Montrer que H est stable par u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi \circ u = \lambda\varphi$.

Déterminer les sous-espaces stables de l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 — Polynôme annulateur d'une matrice de rang 1

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer que $\mathrm{A}^2 = \operatorname{Tr}(\mathrm{A})\mathrm{A}$.

Exercice 6 — Non-inversibilité d'une matrice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices vérifiant $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{A}$.
Démontrer que A n'est pas inversible.

Exercice 7 — Équation matricielle

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices. Résoudre l'équation $\quad \mathrm{X} + \operatorname{Tr}(\mathrm{X})\mathrm{A} = \mathrm{B} \quad$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8 — Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On se donne une forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(\mathrm{AB}) = \varphi(\mathrm{BA})$$

Montrer que φ est proportionnelle à la trace.

Exercice 9 — Description des hyperplans de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(\mathrm{M}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{AM})$$

En déduire que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.

Exercice 10 — Écriture d'un sous-espace vectoriel comme intersection d'hyperplans

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.
Montrer que F peut s'écrire comme l'intersection de $n - p$ hyperplans de E.

Exercice 11 — Étude de l'éventuelle linéarité en un point du déterminant

Soient $n \geqslant 2$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(\mathrm{A} + \mathrm{X}) = \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{X})$$

Montrer que $\mathrm{A} = 0$.

Exercice 12 — La trace d'un projecteur est égale à son rang

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un projecteur de E. Montrer que $\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.
2. Soient $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs non nuls de E vérifiant $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$.
   a. Montrer que $p = p_1 + \cdots + p_n$ est un projecteur de E.
   b. Prouver que $\operatorname{rg}(p_i) = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 13 — Matrices nilpotentes et matrices semblables

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $A^3 = 0$ et $A \neq 0$.

1. Montrer que si $A^2 \neq 0$ alors A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que si $A^2 = 0$ alors A est semblable à $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 — Calculs de déterminants

1. Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, le déterminant de taille $n \times n$ suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$. On cherche à calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, le déterminant de la matrice $C_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :

$$C_n = \begin{pmatrix} a & c & \cdots & \cdots & c \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & c \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

   a. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Montrer que l'application :
   $$P_n : x \mapsto \det(C_n + xK_n)$$
   est un polynôme de degré au plus 1.

   b. En déduire $\det(C_n)$.

3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

4. On définit la matrice $A = \left(|i-j|\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Calculer $\det(A)$.

5. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

6. Soit $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{2n}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 + b_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Exercice 15 — Manipulations de matrices par blocs

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

   Montrer que $\det(M) = \det(A+B)\det(A-B)$.

2. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quatre matrices telles que $CD = DC$ et avec D inversible. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

   Montrer que $\det(M) = \det(AD - BC)$