RÉDUCTION

T.D. N°5

Exercice 1 — Cas pratiques de diagonalisation

Dans les cas suivants, dire si la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et la diagonaliser le cas échéant.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$

Exercice 2 — Diagonalisation d'une matrice tridiagonale

Diagonaliser la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 — Éléments propres d'endomorphismes

Pour chacune des applications f suivantes définies sur E, justifier que f est un endomorphisme de E et calculer ses éléments propres (vecteurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres).

1. Sur $E = \mathbb{K}[X]$, $\forall P \in E$, $f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP$
2. Sur $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
3. Sur $E = \mathbb{K}_n[X]$, $\forall P \in E$, $f(P) = X(1-X)P' + nXP$

Exercice 4 — Étude de la diagonalisabilité d'une matrice

Soient $n \geqslant 3$ et $\alpha, a_2, \dots, a_n, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ des complexes. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ suivante soit diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$$

Exercice 5 — Diagonalisabilité et classe de similitude des matrices de rang 1

Soient $n \geqslant 2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
2. Établir que :

A. Si M est diagonalisable alors M est semblable à la matrice :

$$\mathrm{M}_d = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) \end{pmatrix}$$

B. Si M n'est pas diagonalisable alors M est semblable à la matrice :

$$\mathrm{M}_{nd} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. En déduire que si $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont de rang 1 alors elles sont semblables si et seulement si $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{N})$.

Exercice 6 — Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soient $n \geqslant 2$ et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \neq 0$ et $\mathrm{B} \neq 0$. On définit l'endomorphisme F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivant :

$$\mathrm{F} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + \mathrm{Tr}(\mathrm{AM})\mathrm{B} \end{array}$$

1. Vérifier que $\varphi : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{AM})$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Trouver les éléments propres de F.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que F soit diagonalisable.

Exercice 7 — Utiliser un polynôme annulateur pour obtenir des informations

Soit $n \geqslant 1$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A} + \mathrm{I}_n$. Montrer que $\det(\mathrm{A}) > 0$.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A}^4 = 7\mathrm{A}^3 - 12\mathrm{A}^2$. Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \in \mathbb{N}$ avec $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \leqslant 4n$.
3. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = n$. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.
4. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}$ est pair.

Exercice 8 — L'inverse d'une matrice est un polynôme en la matrice

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Monter qu'il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

Exercice 9 — En dimension impaire

Soient E un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de dimension finie impaire et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
Montrer qu'il existe au moins une droite et un hyperplan de E stables par u.

Exercice 10 — Preuve du théorème de Cayley-Hamilton... partielle !

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. On définit la matrice compagnon suivante :

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On rappelle que le polynôme caractéristique de C est donné par :

$$\chi_C(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

On note dans la suite $(V_0, \ldots, V_{n-1})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $C^k V_0$.
2. Calculer CV_{n-1} puis $\chi_C(C)E_0$.
3. En déduire que $\chi_C(C) = 0$.

Exercice 11 — Matrices n'ayant aucune valeur propre commune

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices n'ayant aucune valeur propre commune. On notera χ_A et χ_B leurs polynômes caractéristiques.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $AX = XB$ si et seulement si $X = 0$.
3. Prouver que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Exercice 12 — Applications de la diagonalisation et de la trigonalisation

1. Calculer les puissances A^k de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   - a. Étudier la diagonalisabilité de la matrice A.
   - b. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et $u_2 = 3$ puis :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$
   Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   - a. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
   - b. En déduire les solutions de l'équation matricielle $X^2 + X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
5. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   - a. Déterminer les sous-espaces vectoriel de $\mathbb{K}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   - b. On note $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$ le commutant de A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec A.
     Démontrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et en donner une base et la dimension.

Exercice 13 — Endomorphismes vérifiant $u^2 = -\mathrm{id}_E$

Soient E un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Donner un exemple en dimension 2.
2. Montrer que les valeurs propres de u sur $\mathbb{C}$ sont imaginaires pures. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Montrer que, pour tout $x \in E$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u.
4. On pose $\dim(E) = 2n$. Prouver qu'il existe une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E telle que $(e_1, u(e_1), \dots, e_n, u(e_n))$ soit une base de E. Expliciter la matrice de u dans cette base.

Exercice 14 — Endomorphisme nilpotent

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes de E vérifiant $v \circ u - u \circ v = \alpha u$ avec $\alpha \neq 0$.

1. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $v \circ u^k - u^k \circ v = \alpha k u^k$.
2. On introduit l'application φ suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ f & \longmapsto & v \circ f - f \circ v \end{array}$$

   Montrer que u est *nilpotent*, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

Exercice 15 — Diagonalisation simultanée

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent, c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux diagonales.
On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E

Exercice 16 — Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice fixée. On définit l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ suivant :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

1. Montrer que φ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
2. Montrer que $\mathrm{sp}(\varphi) = \mathrm{sp}(A)$.
3. Lorsque φ est diagonalisable, donner une base de vecteurs propres de φ.

Exercice 17 — Matrice circulante

Soient $n \geqslant 2$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On définit les deux matrices suivantes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que J est diagonalisable et la diagonaliser.
2. En déduire que A est diagonalisable et la diagonaliser A.
3. Calculer $\det A$.