ESPACES VECTORIELS NORMÉS

T.D. N°6

EXERCICE 1 — ÉTUDES DE NORMES SUR $\mathbb{R}^n$ ET $\mathbb{R}_n[X]$

1. Soient $n \geqslant 1$ et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On pose :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad N(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n x_k f_k(t) \right| \mathrm{d}t$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f_1, \dots, f_n$ pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soient $n \geqslant 1$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On pose :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad N(P) = \sum_{k=0}^n |P(a_k)|$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 2 — ÉTUDE D'UNE NORME

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $\|\cdot\|_F$ une norme sur F. On se donne $u \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire et on pose :

$$\forall x \in E, \quad N(x) = \|u(x)\|_F$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u pour que N soit une norme sur E.

EXERCICE 3 — NORMES DE HÖLDER SUR $\mathbb{R}^n$

Soient $n \geqslant 1$, $p \in]1, +\infty[$ un réel et q le réel tel que $1/p + 1/q = 1$. On pose :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Montrer que : $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2. Prouver que si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = \left(y_1, \dots, y_n\right) \in \mathbb{R}^n$ alors :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \qquad \text{et} \qquad \|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

3. En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

4. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|x\|_\infty$.

EXERCICE 4 — COMPARAISON DES NORMES USUELLES

On considère les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. On fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1, \quad \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$$

Exercice 5 — Tracé de la boule unité d'une norme

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$$

Montrer que N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$ et tracer sa boule unité.

Exercice 6 — Une norme sur les matrices carrées

Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2}$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

Exercice 7 — Un exemple de deux normes non équivalentes

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$N_0(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{2^k} \quad \text{et} \quad N_1(P) = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{2^k}$$

1. Montrer que N_0 et N_1 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Prouver que la suite de polynômes $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme N_0 et vers 1 pour la norme N_1. Est-ce contradictoire avec ce qui a été vu en cours ?

Exercice 8 — Un peu de topologie

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est un ouvert de E alors $F = E$.
2. Soit A une partie convexe de E. Montrer que $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont des parties convexes.

Exercice 9 — Parties ouvertes et fermées

Pour chacune des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes, dire si elles sont ouvertes ou fermées :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > x\right\}, \quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leqslant x\right\} \quad \text{et} \quad C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < |x - 1| < 1\right\}$$

Exercice 10 — Quelques parties denses de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.
2. On souhaite montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrice diagonalisables.
   a. Justifier que l'on peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T une matrice complexe triangulaire supérieure. On notera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T.
   b. Montrer que pour p assez grand, les $\lambda_i + i/p$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ sont distincts deux à deux.
   c. Conclure.

3. Le résultat précédent est-il vrai sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 11 — Distance à une partie non vide

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On notera d la distance associée à la norme de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on appelle *distance de x à* A la quantité :

$$d(x, \mathrm{A}) = \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a)$$

1. Montrer que l'application $x \in \mathrm{E} \mapsto d(x, \mathrm{A}) \in \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne et donc continue.
Indication : on pourra commencer par montrer que $d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A}) \leqslant d(x, y)$.

2. Pour $\mathrm{R} > 0$ on pose $\mathrm{A(R)} = \{x \in \mathrm{E},\ d(x, \mathrm{A}) \leqslant \mathrm{R}\}$. Montrer que si A est convexe alors A(R) est convexe et fermé.

3. On se donne deux parties A et B fermées disjointes et non vides de E.

   a. Montrer que, pour $x \in \mathrm{E} \backslash \mathrm{A}$, $d(x, \mathrm{A}) > 0$ et que, pour $x \in \mathrm{E} \backslash \mathrm{B}$, $d(x, \mathrm{B}) > 0$.

   b. Prouver qu'il existe une fonction continue $f : \mathrm{E} \to [0, 1]$ vérifiant $f(x) = 0$ si $x \in \mathrm{A}$ et $f(x) = 1$ si $x \in \mathrm{B}$.
   Indication : construire f à partir des applications $x \mapsto d(x, \mathrm{A})$ et $x \mapsto d(x, \mathrm{B})$.

Exercice 12 — Un exemple d'application non continue

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|_1$ et on introduit l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ f & \longmapsto & f^2 \end{array}$$

On définit également, pour $n \geqslant 0$, les fonctions f_n en posant :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \sqrt{n} x^n$$

1. Étudier la convergence des suites $\left(f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varphi(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $(\mathrm{E}, \| \cdot \|_1)$.

2. L'application φ est-elle continue?

Exercice 13 — Une suite matricielle

On introduit la matrice $\mathrm{T} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer T^k.

2. Déterminer la limite de la suite matricielle $(\mathrm{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{T}^k}{k!}$$

Exercice 14 — Continuité de l'application $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \chi_\mathrm{A} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$

On fixe $n \in \mathbb{N}$. On cherche à démontrer la continuité de l'application suivante :

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \chi_\mathrm{A} \end{array}$$

1. On se donne $n+1$ scalaires $a_1, \ldots, a_{n+1}$ deux à deux distincts et on pose :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}], \quad \|\mathrm{P}\| = \max\{|\mathrm{P}(a_1)|, \ldots, |\mathrm{P}(a_{n+1})|\}$$

   Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

2. Soit $(\mathrm{P}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Montrer que la suite $(\mathrm{P}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers P si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{P}_m(x) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}(x)$$

3. Prouver que l'application ψ est continue.

Exercice 15 — Espace $\ell^1(\mathbb{R})$

On note $\ell^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ converge absolument. On pose :

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{R}), \quad \|x\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\ell^1(\mathbb{R})$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $e^{(n)}$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice n qui vaut 1.
On fixe $\varepsilon > 0$ et $x \in \ell^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{p} \lambda_k e^{(k)} \right\| \leqslant \varepsilon$$

3. On fixe une suite réelle bornée $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on définit l'application :

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} \ell^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n \end{array}$$

Montrer que φ_a est linéaire et continue de $\ell^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

4. Réciproquement, montrer que toute application linéaire continue de $\ell^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme φ_a avec $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.