SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

T.D. N°7

EXERCICE 1 ●○○ — SUITES DE FONCTIONS

Dans chacun des cas suivants, étudier les convergences simple, uniforme et uniforme sur tout segment de la suite de fonctions (f_n).

1. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$
2. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$
3. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+,\quad f_n(x) = nx^2e^{-nx}$
4. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^*\times[0,1],\quad f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ (avec $\alpha \in \mathbb{N}$)
5. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times[0,1],\quad f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^{2n}}$
6. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+,\quad f_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$
7. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x+n)^2}$
8. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad f_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$

EXERCICE 2 ●●○ — CONVERGENCE UNIFORME VERS LA VALEUR ABSOLUE SUR $[-1,1]$

On définit une suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ en posant :

$$\forall t \in [0,1],\quad \mathrm{P}_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{P}_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{P}_n(t)^2 + t\right)$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
2. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
Indication : démontrer que les fonctions P_n *et* $\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n$ *sont croissantes.*
3. Prouver qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$.

EXERCICE 3 ●●○ — CONVERGENCE UNIFORME VERS UNE EXPONENTIELLE SUR $\mathbb{R}_+$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f et que $f_n \leqslant f$ pour tout $n \geqslant 1$.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$ *pour* $t > -1$.
2. Prouver que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a > 0$.
3. Démontrer que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 4 ●●● — CONVERGENCE UNIFORME DE POLYNÔMES SUR $\mathbb{R}$

Soit $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
Montrer que f est polynomiale.

Exercice 5 ●○○ — Séries de fonctions

Dans chacun des cas suivants, étudier les convergences simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.

1. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$
2. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^3x}$
3. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad u_n(x) = xe^{-nx^2}$
4. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [0,1], \quad u_n(x) = x^n(1-x^n)$

Exercice 6 ●○○ — Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{\ln(n+x)}{n^2+x}$$

1. Étudier la convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum u_n$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$.

Exercice 7 ●○○ — Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

1. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{S}(x)$.
3. Montrer que :

$$\int_0^\pi \mathrm{S}(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

4. Prouver que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

Exercice 8 ●●○ — Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

1. Donner le domaine de définition $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum u_n$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions sur D.
2. Étudier la continuité de S sur D.
3. Déterminer un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.

Exercice 9 ●●○ — Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 0$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

1. Étudier les différents types de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Prouver que S est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. S est-elle dérivable en 0 ?
4. Trouver une équation différentielle du second ordre satisfaite par S.
5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$.

Exercice 10 ●●○ — Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}$$

1. Étudier les différents types de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S admet une limite finie en $+\infty$.
3. Prouver que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{S}'(x)$.

Exercice 11 ●●○ — Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $]-1,+\infty[$ en posant :

$$\forall x > -1, \quad u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Pour $x > -1$, calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ et en déduire un équivalent de S en -1^+.
4. Établir que : $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
5. En déduire un équivalent de S au voisinage de $+\infty$

Exercice 12 ●●● — Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $]0,\pi[$ en posant :

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad u_n(x) = \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Calculer f' et en déduire f sur $]0,\pi[$.

Exercice 13 ●●○ — Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 0$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u_n(x) = e^{-n^2 x}$$

1. Étudier les différents types de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Former le développement asymptotique de $S(x)$ à la précision e^{-5x} lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

Exercice 14 ••• Étude d'une série de fonction

On définit une fonction f, sous réserve de convergence de la série, en posant :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$$

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Si $n, N \in \mathbb{N}$ vérifient $n+1 \leqslant N$, montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k v_k = \sum_{k=n}^{N} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_N v_N - S_n v_{n+1}$$

2. Montrer que f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et calculer f'.

3. En déduire que :

$$\forall x \in\,]-1,1[, \quad f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right)$$

4. À l'aide de la question **1.**, montrer que la convergence de la série est uniforme sur $[\pi/3, 1]$ et en déduire que la convergence est uniforme sur $[-1,1]$.

5. Calculer, en cas de convergence, les deux sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$$

Exercice 15 ••• Étude d'une série de fonction

On définit une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,a]$ pour $a > 0$ en prenant $u_0 \in \mathscr{C}([0,a],\mathbb{R})$ et en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,a], \quad u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^n$ avec $u_n^{(n)} = u_0$ et $u_n(0) = u_n'(0) = \cdots = u_n^{(n-1)}(0) = 0$.

2. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,a]$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.

3. Montrer que S est solution du problème de Cauchy $y' - y = u_0$ et $y(0) = 0$. En déduire S en fonction de u_0.