SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Éléments de correction du T.D. n°7

Exercice 0 ●●○ Exercice du 13/12/2019

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{(n+x)^2}$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
On notera S la somme dans la suite.
Pour $x = 0$, $\sum_{n\geqslant 1} u_n(0) = \sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ est une série de Riemann convergente. Si $x > 0$, on a $u_n(x) \leqslant e^{-nx} = (e^{-x})^n$, terme général d'une série géométrique convergente puisque $|e^{-x}| < 1$ étant donné que $x > 0$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.
D'où la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Étudier la continuité de S sur $\mathbb{R}_+$.

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- De plus, il y a convergence normale de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ car :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \geqslant 0, \quad |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

avec $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ série de Riemann convergente. Il y a par conséquent convergence uniforme de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit par théorème de cours que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x > 0, \quad u_n'(x) = -\frac{e^{-nx}(n^2+nx+2)}{(n+x)^3}$$

- Il y a convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **1**.
- De plus, il y a convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ car :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*, \quad |u_n(x)| = \frac{e^{-nx}(n^2+nx+2)}{(n+x)^3} \leqslant \frac{e^{-na}(n^2+nb+2)}{(n+a)^3}$$

avec $\sum_{n\geqslant 1} e^{-na}(n^2+nb+2)/(n+a)^3$ série convergente puisque $e^{-na}(n^2+nb+2)/(n+a)^3 \sim e^{-na}/n$ et que $e^{-na}/n \leqslant e^{-na} = (e^{-a})^n$, terme général d'une série géométrique convergente puisque $|e^{-a}| < 1$ car $a > 0$. Il y a par conséquent convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit par théorème de cours que S est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

4. Étudier la limite de S en $+\infty$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \to 0$ en $+\infty$.
- De plus, il y a convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de la double limite donne que S admet $\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$ comme limite en $+\infty$.

Exercice 2 ●●○ — Convergence uniforme vers la valeur absolue sur $[-1,1]$

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ en posant :

$$\forall t\in[0,1],\quad P_0(t)=0 \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad P_{n+1}(t)=\frac{1}{2}\left(P_n(t)^2+t\right)$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
   Pour $t\in[0,1]$, on note $\varphi_t : x\mapsto (x^2+t)/2$. Par étude de φ_t, on a $\varphi_t([0,1])\subset[0,1]$ et φ_t croissante. On peut alors prouver par récurrence que $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,1]$ et est croissante. Ainsi cette suite est croissante majorée, elle converge. Ceci donne la convergence simple de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$. Pour déterminer la valeur de la limite, on résout $\varphi_t(\ell)=\ell$ et on trouve que la limite simple est $f : t\mapsto 1-\sqrt{1-t}$.

2. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
   Indication : démontrer que les fonctions P_n *et* $P_{n+1}-P_n$ *sont croissantes.*
   On peut vérifier par récurrence à l'aide de la croissance de φ_t que P_n est croissante. Dès lors, on prouve, toujours par récurrence, que $P_{n+1}-P_n$ est croissante. L'initialisation est claire et pour l'hérédité :

$$0\leqslant P_{n+2}-P_{n+1}=\frac{1}{2}(P_{n+1}^2-P_n^2)=\frac{1}{2}(P_{n+1}-P_n)(P_{n+1}+P_n)$$

   On a $P_{n+1}-P_n$ positive et, par l'hypothèse de récurrence, croissante. De plus, P_n et P_{n+1} sont croissantes donc $P_{n+1}+P_n$ aussi. De plus, cette fonction est positive. Ainsi $P_{n+2}-P_{n+1}$ est croissante.
   Pour $m\geqslant n\geqslant 0$ et $t\in[0,1]$, on écrit $0\leqslant P_m(t)-P_n(t)\leqslant P_m(1)-P_n(1)$ par croissance de P_m-P_n, ce qui donne à la limite $m\to+\infty$ la relation $0\leqslant f(t)-P_n(t)\leqslant f(1)-P_n(1)$. Par convergence simple de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f en 1, on en déduit la convergence uniforme de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Prouver qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$.
   Poser, pour $t\in[0,1]$, $Q_n(t)=1-P_n(1-t^2)$.

Exercice 3 ●●○ — Convergence uniforme vers une exponentielle sur $\mathbb{R}_+$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x\in[0,n]\\ 0 & \text{si } x>n\end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f et que $f_n\leqslant f$ pour tout $n\geqslant 1$.
   Indication : on pourra utiliser l'inégalité $\ln(1+t)\leqslant t$ *pour* $t>-1$.
   Soit $x\geqslant 0$. Pour n assez grand, on a $x\in[0,n]$. On montre alors que $f_n(x)$ tend vers e^{-x} lorsque $n\to+\infty$ en passant à la forme exponentielle. Ainsi $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f : x\in\mathbb{R}_+\mapsto e^{-x}$.
   Fixons $n\geqslant 1$ et montrons $f_n\leqslant f$. Si $x>n$, on a clairement $f_n(x)\leqslant f(x)$. Si $x\in[0,n]$, cela résulte de l'inégalité de l'énoncé en passant à la forme exponentielle et en utilisant la croissance de la fonction exponentielle.

2. Prouver que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a>0$.
   Pour $n\geqslant 1$, on définit $g_n : x\in[0,a]\mapsto 1-e^x f_n(x)$. Par étude de g_n pour $n>a$ on montre que cette fonction est croissante. Ainsi, pour $x\in[0,a]$, on a $0\geqslant e^{-x}-f_n(x)=e^{-x}g_n(x)\leqslant e^{-x}g_n(a)\leqslant g_n(a)$. Or on vérifie que $g_n(a)$ tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$, ce qui démontre la convergence uniforme de $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f sur $[0,a]$.

3. Démontrer que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
   Soit $\varepsilon>0$. Fixons $a>0$ tel que $e^{-a}\leqslant\varepsilon$ (qui existe puisque $e^{-a}\to 0$ lorsque $a\to+\infty$). On a alors, pour $x\geqslant a$, $0\leqslant e^{-x}-f_n(x)\leqslant e^{-x}\leqslant e^{-a}\leqslant\varepsilon$. Avec la convergence uniforme de $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f sur $[0,a]$, on a, pour $x\in[0,a]$, et à partir d'un certain rang, $0\leqslant e^{-x}-f_n(x)\leqslant\varepsilon$. En combinant les deux relations, on a prouvé la convergence uniforme de $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 ●●● — Convergence uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
Montrer que f est polynomiale.

La convergence uniforme de $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $\mathbb{R}$ donne un rang n_0 à partir duquel $\|\mathrm{P}_n - f\|_\infty \leqslant 1$. Par inégalité triangulaire, cela donne, pour $n \geqslant n_0$, que $\|\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n_0}\|_\infty \leqslant 2$. Les polynômes $(\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n_0})_{n\geqslant n_0}$ étant bornés, ils sont constants, égaux à $\mathrm{C}_n \in \mathbb{R}$. De plus $\mathrm{P}_n(0) - \mathrm{P}_{n_0}(0) = \mathrm{C}_n$ tend vers $f(0) - \mathrm{P}_{n_0}(0)$. Ainsi P_n tend vers $\mathrm{P}_{n_0} + f(0) - \mathrm{P}_{n_0}(0)$ qui est bien un polynôme.

Exercice 8 ●●○ — Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

1. Donner le domaine de définition $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum u_n$.
On notera S la somme de cette série de fonctions sur D.
Pour $x = 0$, $\sum_{n\geqslant 1} u_n(0)$ diverge par divergence de la série harmonique. Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \sim 1/(n^2x^2)$, terme général d'une série de Riemann convergente. Ainsi $\mathrm{D} = \mathbb{R}_+^*$.

2. Étudier la continuité de S sur D.

   - Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont continues sur D.
   - De plus, il y a convergence normale de la série de fonctions sur tout intervalle $[\,a, +\infty\,[$ pour $a > 0$ car :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \geqslant a, \quad |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2a^2}$$

   avec $\sum_{n\geqslant 1} 1/(n^2a^2)$ série de Riemann convergente. Il y a par conséquent convergence uniforme de la série de fonctions sur tout segment de D.

   On en déduit par théorème de cours que S est continue sur D.

3. Déterminer un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.
La série de fonction $\sum_{n\geqslant 1} x^2 u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x > 0, \quad \left|x^2 u_n(x)\right| \leqslant \frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2}$$

avec $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ série de Riemann convergente. L'application du théorème de la double limite donne alors que $x^2\mathrm{S}(x)$ tend vers $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ de sorte que $\mathrm{S}(x) \sim \pi^2/(6x^2)$ en $+\infty$.

Exercice 11 ●●○ — Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $]\,-1, +\infty\,[$ en posant :

$$\forall x > -1, \quad u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est définie et continue sur $]\,-1, +\infty\,[$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.
Pour $x > -1$ et tout $n \geqslant 1$, on a $u_n(x) = x/(n(n+x))$, terme général d'une série convergente puisque c'est clair pour $x \neq 0$ et que $u_n(x) \sim x/n^2$ sinon. On obtient donc la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $]\,-1, +\infty\,[$.

   - Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont continues sur $]\,-1, +\infty\,[$.
   - De plus il y a convergence normale et donc uniforme sur tout segment de $]\,-1, +\infty\,[$ puisque :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in [\,a, b\,] \subset]\,-1, +\infty\,[, \quad |u_n(x)| = \left|\frac{x}{n(n+x)}\right| \leqslant \frac{\max(|a|, |b|)}{n(n+a)}$$

   avec $\sum_{n\geqslant 1} \max(|a|, |b|)/n(n+a)$ série convergente puisque son terme général est équivalent à une constante près à celui d'une série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ convergente.

   Par résultat de cours, S est continue sur $]\,-1, +\infty\,[$.

2. Étudier la monotonie de S.
Pour $n \geqslant 1$, la fonction u_n est clairement croissante sur $]-1,+\infty[$. Pour $N \geqslant 1$ fixé, $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ l'est donc aussi par somme finie de fonctions croissantes. On a donc, pour tous $x \leqslant y$ de $]-1,+\infty[$ et tout $N \geqslant 1$, $S_N(x) \leqslant S_N(y)$. On obtient $S(x) \leqslant S(y)$ en passant à la limite $N \to +\infty$. Ainsi S est croissante sur $]-1,+\infty[$.

3. Pour $x > -1$, calculer $S(x+1) - S(x)$ et en déduire un équivalent de S en -1^+.
Avec les mêmes notations, on a, pour $N \geqslant 1$ et $x > -1$, $S_N(x+1) - S_N(x) = 1/(1+x) - 1/(N+x+1)$ par téléscopage. Ainsi, on obtient $S(x+1) - S(x) = 1/(1+x)$ en passant à la limite $N \to +\infty$. S étant continue en 0 on a $S(x+1)$ tend vers $S(0) = 0$ en -1. Avec la relation précédente, on obtient $(1+x)S(x)$ tend vers -1 en -1 et donc $S(x) \sim -1/(1+x)$ en -1.

4. Établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
Avec les mêmes notations, on a, pour $N \geqslant n$, $S_N(n) = \sum_{k=1}^{n} 1/k - \sum_{k=1}^{n} 1/(k+N)$ par téléscopage. Ainsi, on obtient $S(n) = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ en passant à la limite $N \to +\infty$.

5. En déduire un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.
On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} 1/k \sim \ln n$ lorsque $n \to +\infty$. Montrons que $S(x) \sim \ln x$ lorsque $x \to +\infty$. Soit $x > -1$. On a par croissance de S et de ln et en notant $n_x = \lfloor x \rfloor$:
$$\forall x > -1, \quad \frac{S(n_x)}{\ln(n_x+1)} \leqslant \frac{S(x)}{\ln(x)} \leqslant \frac{S(n_x+1)}{\ln(n_x)} \quad \text{et donc} \quad \frac{S(n_x)}{\ln(n_x)}\frac{\ln(n_x)}{\ln(n_x+1)} \leqslant \frac{S(x)}{\ln(x)} \leqslant \frac{S(n_x+1)}{\ln(n_x+1)}\frac{\ln(n_x+1)}{\ln(n_x)}$$
Lorsque $x \to +\infty$, on a $n_x \to +\infty$. En utilisant $S(n)/\ln(n) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$, on montre que $S(x)/\ln(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 12 ••• Étude d'une série de fonction

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $]0,\pi[$ en posant :
$$\forall x \in]0,\pi[, \quad u_n(x) = \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.

- Soit $x \in]0,\pi[$. On a, pour tout $n \geqslant 1$, $|u_n(x)| \leqslant |\cos(x)|^n$ avec $|\cos(x)| < 1$ d'où la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ par comparaison avec une série géométrique convergente. Ainsi $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0,\pi[$.
- Les fonctions (u_n) sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$ avec, pour $x \in]0,\pi[$ et $n \geqslant 1$, $u_n'(x) = \cos^{n-1}(x)\cos((n+1)x)$.
- Soit $[a,b] \subset]0,\pi[$, on a pour tout $x \in [a,b]$ et $n \geqslant 1$, $|u_n'(x)| \leqslant q^{n-1}$ où $q = \max(|\cos(a)|,|\cos(b)|)$ avec $\sum_{n\geqslant 1} q^{n-1}$ convergente puisque $|q| < 1$. On obtient la convergence normale et donc uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ sur tout segment de $]0,\pi[$.

Par théorème de cours, S est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.

2. Calculer S' et en déduire S sur $]0,\pi[$.
S' peut se calculer en la reliant à la partie réelle de la somme de la série géométrique de raison complexe $q = \cos(x)e^{ix}$. On trouve $S'(x) = -1$ pour $x \in]0,\pi[$. On en conclut que $S(x) = -x + C$ pour $x \in]0,\pi[$ avec une certaine constante C. On trouve $C = \pi/2$ en appliquant en $x = \pi/2$.