SÉRIES ENTIÈRES

T.D. N°8

Exercice 1 ●○○ — Étude de séries entières

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 2} \ln(n) z^n$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n z^n$
3. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n\ln(n)}{n^2+1} z^n$
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^n$
5. $\sum_{n\geqslant 0} \ln(n!) z^n$
6. $\sum_{n\geqslant 0} \left(e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}\right) z^n$
7. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2n}}{(2n)!} z^{3n}$
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n}{2^n+n!} z^n$
9. $\sum_{n\geqslant 0} \sin(\sqrt{n}) z^n$

Exercice 2 ●○○ — Étude de séries entières et calculs de sommes

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et en calculer la somme :

1. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2^n}$
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-5n+1}{n!} x^n$
6. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch}(n\theta)}{n} x^n \quad (\theta \in \mathbb{R})$
7. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{n^2-1} x^n$
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n \quad (\theta \in \mathbb{R})$
9. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

Exercice 3 ●●○ — Étude d'une série entière

Dans la suite, on introduit, pour $n \geqslant 1$, la quantité H_n définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} H_n x^n$.
2. Calculer la somme S de cette série entière à l'aide d'un produit de Cauchy.
3. En utilisant la relation $H_{n+1} = H_n + 1/(n+1)$ pour $n \geqslant 1$, retrouver l'expression de S.

Exercice 4 ●○○ — Développements en série entière

Dans chaque cas, développer en série entière la fonction f en 0 et donner le rayon de convergence associé :

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}$
3. $f(x) = \ln(x^2-5x+6)$
4. $f(x) = e^{-x}\sin(x)$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)$
6. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Exercice 5 ●●○ — Développement en série entière de Arctan^2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2p+1}$.

Donner le développement en série entière en 0 de Arctan^2 et préciser le rayon de convergence associé.
On exprimera les coefficients du développement en fonction des $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 ●○○ — Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une fonction

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 ●●○ — Développement en série entière d'une fonction

On fixe $a \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ et on définit une fonction f sur $]-1,1[$ en posant :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\tan(a)\right)$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f'(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+e^{2ia}}\right)$$

2. Développer la fonction f en série entière en 0 et préciser le rayon de convergence associé.

Exercice 8 ●●○ — Développement d'une fonction définie par une intégrale

On définit la fonction f suivante :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1-t^2)}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Montrer que la fonction f est développable en série entière en 0 et préciser le rayon de convergence associé.

Exercice 9 ●●○ — Une fonction $\mathscr{C}^\infty$ non développable en série entière

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^*$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \exp\left(-1/x^2\right)$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp\left(-1/x^2\right)$$

2. Démontrer que f admet un prolongement g sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g^{(n)}(0) = 0$.

3. Prouver que g n'est pas développable en série entière.

Exercice 10 ●●● — Sur le bord du disque ouvert de convergence

Dans la suite, on considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence 1 dont la somme est notée S.

1. On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est absolument convergente.
Montrer que S est continue sur $[-1,1]$.

2. On fait l'hypothèse que la série de fonctions $\sum a_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Montrer que $S(1)$ est définie et que :

$$S(1) = \lim_{t \to 1^-} S(t)$$

3. Déduire de la question précédente la convergence et la valeur de la somme des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

4. On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est convergente et on souhaite montrer que S est continue sur $[0,1]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera R_n le reste d'ordre n de la série $\sum a_n$.

   A. Démontrer que :

$$\forall x \in [0,1[, \quad S(1) - S(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$$

   Indication : on remarquera que $a_n = R_{n-1} - R_n$ *pour* $n \geqslant 1$.

   B. Démontrer que S est continue sur $[0,1]$.

Exercice 11 ●●● Calcul d'une somme

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière suivante :

$$\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

Dans la suite, on notera S la somme de cette série entière.

2. Déterminer l'ensemble de continuité de S.

3. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Exercice 12 ●●● Équivalents de sommes de séries entières

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geqslant 2} \ln(n) x^n, \qquad \sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n \geqslant 2} \frac{x^n}{n}$$

Dans la suite, on notera respectivement f, g et h les sommes de ces séries entières.

2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1[$.

3. Pour $x \in]-1,1[$, déterminer une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

4. Prouver que $g+h$ est continue sur $[0,1]$ et en déduire que $g(x) \sim \ln(1-x)$ au voisinage de 1^-.
En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1^-.

Exercice 13 ●●○ Simplification d'une somme

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une équation différentielle vérifiée par f.
2. Prouver que f est développable en série entière en 0 et donner la série entière associée ainsi que son rayon de convergence.
3. Établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!} x^{2n+1}$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$$

Exercice 14 ●●○ — Nombres de Catalan

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $c_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

1. On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et l'on note f sa somme.
   Montrer qu'au voisinage de 0, la fonction f vérifie la relation $xf(x)^2 = f(x) - 1$.
2. Toujours sous l'hypothèse de la question précédente, prouver qu'au voisinage de 0 la fonction f est égale à la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

3. Montrer que la fonction g est développable en série entière en 0 et donner son développement et le rayon de convergence associé.
4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$