SÉRIES ENTIÈRES

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DU T.D. N°8

EXERCICE 6 ●○○ — CLASSE $\mathscr{C}^\infty$ D'UNE FONCTION

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \neq 0$, grâce au D.S.E. de exp, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$$

De plus, la série entière précédente vaut 1 en 0 de sorte qu'elle est égale à f sur $\mathbb{R}$ tout entier. Cette série entière étant de rayon de convergence $+\infty$, on en déduit que f, qui est la somme de cette dernière, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 7 ●●○ — DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE D'UNE FONCTION

On fixe $a \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ et on définit une fonction f sur $]-1,1[$ en posant :

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\tan(a)\right)$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad f'(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+e^{2ia}}\right)$$

On vérifie que f est bien dérivable sur $]-1,1[$ et on obtient par calcul que :

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad f'(x) = \frac{-2\tan(a)(1+x)^2}{(1+x)^2 + (1-x)^2\tan^2(a)}$$

On calcule ensuite :

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+e^{2ia}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x+e^{-2ia}}{(x+\cos(2a))^2+\sin^2(2a)}\right) = \frac{-\sin(2a)}{x^2+2x\cos(2a)+1} = f'(x)$$

en utilisant les formules $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$, $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ et $1/\cos^2(a) = 1 + \tan^2(a)$.

2. Développer la fonction f en série entière en 0 et préciser le rayon de convergence associé.
En utilisant le développement de la série exponentielle complexe sur $\mathbb{C}$, on a :

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+e^{2ia}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-2ia}}{1+xe^{-2ia}}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-2i(n+1)a}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin(2(n+1)a)x^n$$

En intégrant ce développement de rayon de convergence 1, on obtient, étant donné que $f(0) = a$, le résultat :

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad f(x) = a + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(2na)}{n}x^n$$

Exercice 9 ●●○ — Une fonction $\mathscr{C}^\infty$ non développable en série entière

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^*$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \exp\left(-1/x^2\right)$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer qu'il existe un polynôme $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(1/x)\exp\left(-1/x^2\right)$$

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation est claire avec $\mathrm{P}_0 = 1$. Si le résultat est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, on dérive $f^{(n)}$ (qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$) et on écrit, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n+1)}(x)$ sous la forme $\mathrm{P}_{n+1}(1/x)\exp(-1/x^2)$ avec $\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^3\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) - \mathrm{X}^2\mathrm{P}'_n(\mathrm{X}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2. Démontrer que f admet un prolongement g sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g^{(n)}(0) = 0$.
On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en montrant que f admet un prolongement g sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ avec $g^{(n)}(0) = 0$. L'initialisation est claire puisque f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et admet 0 pour limite en 0 de sorte qu'on peut obtenir un prolongement continu g de f sur $\mathbb{R}$ en posant $g(0) = 0$. Si le résultat est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, on sait que $g^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, sur $\mathbb{R}^*$, $g^{(n)} = f^{(n)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $f^{(n+1)}(x) = \mathrm{P}_{n+1}(1/x)\exp(-1/x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. On a alors que $g^{(n+1)}$ tend vers 0 en 0 par croissance comparée de sorte que par le théorème de la limite de la dérivée, la fonction $g^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $g^{(n+1)}(0) = 0$.

3. Prouver que g n'est pas développable en série entière.
La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Si elle était développable en série entière, elle serait égale à sa série de Taylor sur un voisinage de 0. Or la série de Taylor de g est nulle puisque l'on a $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela donnerait $g = 0$ sur un voisinage de 0, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 10 ●●● — Sur le bord du disque ouvert de convergence

Dans la suite, on considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence 1 dont la somme est notée S.

1. On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est absolument convergente.
Montrer que S est continue sur $[-1,1]$.
On a $\sup_{[-1,1]} |a_n x^n| = |a_n|$, terme général d'une série convergente par hypothèse. Ainsi $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$. Les fonctions $(x \mapsto a_n x^n)$ étant continues sur $[-1,1]$, la somme S l'est aussi.

2. On fait l'hypothèse que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Montrer que $\mathrm{S}(1)$ est définie et que :

$$\mathrm{S}(1) = \lim_{t \to 1^-} \mathrm{S}(t)$$

La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Les fonctions $(x \mapsto a_n x^n)$ étant continues sur $[0,1]$, la somme S l'est aussi. Ainsi $\mathrm{S}(1)$ existe et $\mathrm{S}(t) \to \mathrm{S}(1)$ lorsque $t \to 1^-$ par continuité de S en 1.

3. Déduire de la question précédente la convergence et la valeur de la somme des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Les séries de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}x^n/n$ et $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n/(2n+1)$ relèvent du théorème spécial des séries alternées. Ce dernier donne la convergence simple sur $[0,1]$ puis la convergence uniforme sur $[0,1]$ par majoration des restes par une quantité indépendante de x et tendant vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (par $1/(n+1)$ et $1/(2n+3)$ respectivement). Ainsi il y a convergence uniforme sur $[0,1]$ de ces deux séries de fonctions. On peut utiliser le résultat précédent qui affirme que $\mathrm{S}(t) \to \mathrm{S}(1)$ lorsque $t \to 1^-$. Les sommes sur $]-1,1[$ de ces deux séries de fonctions étant respectivement $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

4. On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est convergente et on souhaite montrer que S est continue sur $[0,1]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera R_n le reste d'ordre n de la série $\sum a_n$.

a. Démontrer que :

$$\forall x \in [0,1[, \quad S(1) - S(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$$

Indication : on remarquera que $a_n = R_{n-1} - R_n$ *pour* $n \geqslant 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, on écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) = \sum_{k=1}^{n}(R_{k-1}-R_k)(1-x^k) = \sum_{k=0}^{n-1} R_k(1-x^{k+1}) - \sum_{k=1}^{n} R_k(1-x^k) = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} R_k x^k - (1-x^n)R_n$$

On a $R_n \to 0$ puisque $\sum a_n$ converge et $x^n \to 0$ puisque $x \in [0,1[$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) \to (1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} R_k x^k$. Or $\sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) \to S(1)-S(x)$, d'où le résultat.

b. Démontrer que S est continue sur $[0,1]$.

On étudie $g : x \mapsto S(1) - S(x)$ pour $x \in [0,1]$ qui est la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} R_n x^n(1-x)$. On va montrer que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0,1]$, ce qui assurera le résultat puisque les fonctions $(x \mapsto R_n x^n(1-x))$ sont continues sur $[0,1]$. Pour $\varepsilon > 0$, on a $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$ puisque $R_n \to 0$. Soit $x \in [0,1[$ et $n \geqslant n_0$. On écrit :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k(1-x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |R_k|\, x^k(1-x) \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = \varepsilon x^{n+1} \leqslant \varepsilon$$

Cette dernière inégalité est aussi vraie si $x = 1$. On obtient ainsi la conclusion puisque l'on vient de montrer que le reste de la série de fonctions étudiée converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Exercice 11 ••• Calcul d'une somme

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

Dans la suite, on notera S la somme de cette série entière.

On obtient facilement $R = 1$.

2. Déterminer l'ensemble de continuité de S.

Par théorème de cours, S est continue sur $]-1,1[$. De plus, la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/(2n+1)(2n-1)$ converge (car le terme général est équivalent à $1/(4n^2)$) de sorte que l'on se trouve dans le cas de la question **1.** de l'**Exercice 10**. Ainsi S est continue sur $[-1,1]$.

3. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

La continuité en 1 de S donne :

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

En écrivant que $1/(2n+1)(2n-1) = 1/(2(2n-1)) - 1/(2(2n+1))$ pour $n \geqslant 1$, on peut obtenir une expression de la somme S, à savoir $S(x) = 1/2(x^2 \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x) - x)$ pour $x \in]-1,1[$. En faisant tendre x vers 1^-, on obtient que la somme recherchée vaut donc $(\pi - 2)/4$.

Exercice 12 ••• Équivalents de sommes de séries entières

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 2} \ln(n) x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n}$$

Dans la suite, on notera respectivement f, g et h les sommes de ces séries entières.

On obtient facilement $R = 1$ dans chacun des cas.

2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1[$.
Par le cours, on sait déjà que g est continue sur $]-1,1[$. Montrons qu'elle est continue sur $[-1,0]$. On remarque que, pour $x \in [-1,0]$, le terme général de la série définissant g est $(-1)^n |x|^n \ln(1-1/n)$ dont la valeur absolue est décroissante et tend vers 0. Le théorème spécial des séries alternées donne donc l'existence de $g(x)$ pour $x \in [-1,0]$ et une majoration du reste, toujours pour $x \in [-1,0]$: $R_n(x) \leqslant |x|^{n+1} \ln(1-1/(n+1)) \leqslant \ln(1-1/(n+1))$. Ainsi la série de fonctions définissant g converge uniformément sur $[-1,0]$. Les fonctions $(x \mapsto (-1)^n |x|^n \ln(1-1/n))$ étant continues sur $[-1,0]$, on en déduit que g est continue sur $[-1,0]$ par théorème de continuité des sommes de séries de fonctions.

3. Pour $x \in]-1,1[$, déterminer une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.
Pour $x \in]-1,1[$, on calcule $(1-x)f(x) = f(x) - xf(x)$ en remplaçant f par la somme de la série entière la définissant. Après un changement d'indice ($\ell = n+1$) dans la seconde somme, on trouve que : $(1-x)f(x) = -g(x)$.

4. Prouver que $g+h$ est continue sur $[0,1]$ et en déduire que $g(x) \sim \ln(1-x)$ au voisinage de 1^-.
En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1^-.
Pour $x \in [0,1[$, on a $h(x) + g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(1/n + \ln(1-1/n))x^n$ avec pour tout $n \geqslant 2$ et $x \in [0,1]$, la majoration $|1/n + \ln(1-1/n)x^n| \leqslant |1/n + \ln(1-1/n)| = O(1/n^2)$ par développement limité. Ainsi la série définissant $h+g$ converge normalement sur $[0,1]$ et $h+g$ est continue sur $[0,1]$ par théorème de continuité des sommes de séries de fonctions. Ainsi $h+g$ est continue en 1 et donc bornée au voisinage de 1. Donc $h+g = O(1)$ au voisinage de 1. Cela donne, en explicitant h grâce aux développements en série entière usuels, que, au voisinage de 1 : $g(x) = \ln(1-x) + x + O(1)$. Cela permet de conclure que $g(x) \sim \ln(1-x)$ au voisinage de 1. Enfin, grâce à la relation de la question précédente, on trouve que $f(x) \sim \ln(1-x)/(x-1)$ au voisinage de 1.

Exercice 14 ●●○ — Nombres de Catalan

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $c_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

1. On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ et l'on note f sa somme.
Montrer qu'au voisinage de 0, la fonction f vérifie la relation $xf(x)^2 = f(x) - 1$.
On fixe $x \in]-R,R[$ (qui est non vide par hypothèse). La relation de récurrence définissant la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet par produit de Cauchy d'affirmer que $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}x^n$. On montre alors facilement que $xf(x)^2 = f(x) - 1$ en calculant chaque terme de cette égalité et en montrant qu'ils coïncident bien (un changement de variable $\ell = n+1$ intervient sur le terme de gauche).

2. Toujours sous l'hypothèse de la question précédente, prouver qu'au voisinage de 0 la fonction f est égale à la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

Sous l'hypothèse de la question précédente, on sait que $xf(x)^2 = f(x) - 1$ sur $]-R,R[$. À $x \in]-R,R[$ fixé, on résout cette équation du second degré de discriminant $\Delta = 1-4x$. On se place sur $]-R,R[\cap]-1/4,1/4[$ de sorte que $\Delta > 0$. Cela donne, pour $x \neq 0$, deux racines $f(x) = (1 \pm \sqrt{1-4x})/(2x)$. Comme $f(0) = c_0 = 1 > 0$, on sait par continuité de f que f est strictement positive au voisinage de 0 ce qui nous permet de conclure que l'on a nécessairement, pour $x \neq 0$, l'égalité $f(x) = (1-\sqrt{1-4x})/(2x)$ quitte à restreindre encore $]-R,R[\cap]-1/4,1/4[$. Au point 0, on peut vérifier que l'égalité est vérifiée à l'aide d'un développement limité.

3. Montrer que la fonction g est développable en série entière en 0 et donner son développement et le rayon de convergence associé.
Pas de difficulté, on trouve que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$ sur $]-1/4,1/4[$ avec un rayon de $R = 1/4$.

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Sur $]-1/4, 1/4[$, on peut prouver que $xg(x)^2 = g(x) - 1$ et $g(0) = 1$, ce qui va nous donner que les coefficients $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du développement en série entière de g vérifient $d_0 = 1$ et $d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On montre alors que $c_n = d_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par un raisonnement par récurrence, ce qui permet de conclure avec l'expression de d_n pour $n \in \mathbb{N}$ trouvée à la question précédente.