INTÉGRATION

T.D. N°9

Exercice 1 ●●○ — Intégrale de Poisson

Pour $x \neq \pm 1$ et $n \geqslant 1$, on définit :

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

1. Trouver un réel θ tel que :

$$\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 = (\mathrm{X} - e^{i\theta})(\mathrm{X} - e^{-i\theta})$$

2. Déterminer les racines du polynôme $\mathrm{X}^{2n} - 1$ et en déduire :

$$(\mathrm{X}^{2n} - 1)(\mathrm{X}+1) = (\mathrm{X}+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

3. Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(t) + 1\right)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 ●●○ — Équivalent d'une suite d'intégrales

Pour $n \geqslant 0$, on définit l'intégrale I_n en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4n+4} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{2n+2}$$

2. En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
3. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

4. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 ●○○ — Études d'intégrales

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de l'intégrale :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)}$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3 - \sqrt{t} - 1}$
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(2-t)}}$

Exercice 4 ●○○ — Études et calculs d'intégrales

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de l'intégrale et calculer sa valeur en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 5 ●○○ — Deux suites d'intégrales généralisées

On définit deux suites d'intégrales généralisées en posant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{I}_n=\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{J}_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

1. Justifier que les intégrales I_n, $n\in\mathbb{N}$, et J_n, $n\in\mathbb{N}^*$, sont convergentes.
2. Déterminer des relations de récurrence d'ordre 1 pour les suites $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. En déduire la valeur des intégrales I_n pour $n\in\mathbb{N}$ et J_n pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 6 ●●○ — Fonction définie par une intégrale généralisée

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}_+$ en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

1. Justifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 7 ●●○ — Calcul d'une intégrale

On introduit les trois intégrales suivantes :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{J}=\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t\qquad\text{et}\qquad \mathrm{K}=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'intégrale I est convergente.
2. Prouver que $\mathrm{J}=\mathrm{I}$ et $\mathrm{K}=\mathrm{I}$.
3. En écrivant que $2\mathrm{I}=\mathrm{I}+\mathrm{J}$, déterminer la valeur de I.

Exercice 8 ●●● — Intégrales semi-convergentes

On se donne $\alpha\in\mathbb{R}$ et on introduit l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I}_\alpha=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

1. On commence par supposer que $\alpha \leqslant 0$. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t \geqslant 2$$

En déduire la nature de I_α.

2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Démontrer que I_α est absolument convergente.

3. Enfin, on se place dans le cas où $0 < \alpha \leqslant 1$.

   A. Établir, par intégration par parties, la convergence de I_α.

   B. Prouver que la série $\sum_{n \geqslant 1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| \mathrm{d}t$ diverge et en déduire que I_α n'est pas absolument convergente.

4. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}t$.