INTÉGRATION

Éléments de correction du T.D. n°9

Exercice 8 ••• Intégrales semi-convergentes

On se donne $\alpha \in \mathbb{R}$ et on introduit l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I}_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

1. On commence par supposer que $\alpha \leqslant 0$. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant 2$$

En déduire la nature de I_α.
Pour $t \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$, on a : $t^{-\alpha}\sin t \geqslant \sin t$ puisque $t^{-\alpha} \geqslant 1$ car $t \geqslant 2n\pi \geqslant 1$. En intégrant cette inégalité, on obtient par croissance de l'intégrale le résultat demandé.
La fonction $f : t \mapsto t^{-\alpha}\sin t$ est continue sur $[1, +\infty[$. Si I_α convergeait, on peut écrire par la relation de Chasles que $\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f = \int_1^{(2n+1)\pi} f - \int_1^{2n\pi} f$ tend vers $\mathrm{I}_\alpha - \mathrm{I}_\alpha = 0$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui est absurde étant donné la minoration précédemment trouvée.

2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Démontrer que I_α est absolument convergente.
La fonction $f : t \mapsto t^{-\alpha}\sin t$ est continue sur $[1, +\infty[$ et on peut écrire que $|t^{-\alpha}\sin(t)| \leqslant t^{-\alpha}$ pour $t \geqslant 1$. Étant donné que $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann) et on obtient la convergence absolue de I_α par théorème de comparaison.

3. Enfin, on se place dans le cas où $0 < \alpha \leqslant 1$.

A. Établir, par intégration par parties, la convergence de I_α.
On fixe $x \geqslant 1$ et on intègre par parties en intégrant sin dans l'intégrale tronquée suivante :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_1^x - \alpha\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

D'une part, on montre facilement que le crochet admet une limite lorsque $x \to +\infty$. D'autre part, le second terme admet également une limite lorsque $x \to +\infty$. En effet, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos t / t^{\alpha+1}\,\mathrm{d}t$ converge puisqu'elle converge absolument (même méthode que la question précédente avec cette fois $\alpha + 1 > 1$). Ainsi, le terme de gauche de l'égalité admet une limite lorsque $x \to +\infty$, ce qui donne par définition la convergence de I_α.

B. Prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t$ diverge et en déduire que I_α n'est pas absolument convergente.
La fonction $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ étant décroissante et étant donné que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2$, on a, pour tout $n \geqslant 1$, la comparaison $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |t^{-\alpha}\sin t|\,\mathrm{d}t \geqslant 2/((n+1)^\alpha\pi^\alpha)$. La série $\sum_{n\geqslant 1} 2/((n+1)^\alpha\pi^\alpha)$ étant divergente (série de Riemann avec $\alpha \leqslant 1$), on obtient la divergence de la série étudiée par théorème de comparaison.
La somme partielle d'ordre n de la série étudiée vaut, par la relation de Chasles, $\int_\pi^{(n+1)\pi} |t^{-\alpha}\sin t|\,\mathrm{d}t$ et tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ étant donné que la série associée est divergente et à termes positifs. Ainsi $\int_\pi^{+\infty} t^{-\alpha}\sin t$ ne converge pas absolument et I_α non plus.

4. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$.
En notant f l'intégrande, qui est continue sur l'intervalle $[2, +\infty[$, on a, par développement limité en $+\infty$, la relation $f(t) = \sin t/\sqrt{t} - \sin^2 t/(2t) + \mathrm{O}(t^{-3/2})$. On raisonne sur l'intervalle d'intégration $[2, +\infty[$. Le premier terme donne lieu à une intégrale convergente par ce qui précède. Le deuxième terme, en utilisant la formule

$\sin^2 t = 1/2 - \cos(2t)/2$ donne une somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente. Enfin, le dernier terme est intégrable et donne donc lieu à une intégrale convergente. Finalement, l'intégrale étudiée est divergente puisque f est la somme de quatre fonctions, trois dont l'intégrale converge et une dont l'intégrale diverge.