INTÉGRALES À PARAMÈTRE

T.D. N°9 BIS

EXERCICE 1 ●○○ — CALCULS DE LIMITES

Dans chacun des cas suivants, justifier que les intégrales $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

1. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(\cos(t^n))\,\mathrm{d}t$
2. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t$
3. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos t\,\mathrm{d}t$
Indication : prouver $\ln(1+u) \leqslant u$ *pour* $u > -1$.
4. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(nt)e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$
5. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$
Indication : prouver $|\sin u| \leqslant |u|$ *pour* $u \in \mathbb{R}$.
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+nt}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t$
Indication : prouver $(1+u)^n \geqslant 1+nu$ *pour* $u \geqslant 0$.

EXERCICE 2 ●○○ — EXPRESSION INTÉGRALE DE $\zeta(2)$

Démontrer l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

EXERCICE 3 ●●○ — EXPRESSION INTÉGRALE D'UNE SOMME

On se donne $p > 0$ et $q > 0$ deux réels strictement positifs.

1. Pour $x \in]-1,1[$, justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n x^{nq}$ et donner sa somme.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit :
$$\forall x \in [0,1[, \quad \mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{kq}$$
En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, démontrer que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nq+p} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$$
3. Était-il possible d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme ?

EXERCICE 4 ●●○ — TRANSFORMATION INTÉGRALE – SÉRIE

On souhaite établir de deux façons différentes l'identité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1+(2n+1)^2}$$

1. Démontrer le résultat souhaité par application du théorème d'intégration terme à terme.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité $|\sin u| \leqslant |u|$ *pour* $u \in \mathbb{R}$.

2. Démontrer le résultat souhaité par application du théorème de convergence dominée.
Indication : on pourra au préalable montrer que :

$$\forall t > 0, \quad \frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}}$$

Exercice 5 ●●○ — Étude d'une intégrale à paramètre

On définit une fonction f en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} \, \mathrm{d}t$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et calculer f'.
3. En déduire une expression de f.

Exercice 6 ●●○ — Calcul de l'intégrale de Gauss

On définit deux fonctions g et h sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad h(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que g et h sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées.
2. Montrer que la fonction $g + h^2$ est constante et déterminer la valeur de cette constante.
3. Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale *de Gauss* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}$.

Exercice 7 ●●○ — Étude d'une intégrale à paramètre

On définit une fonction g en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \operatorname{sh} t}{t} \, \mathrm{d}t$$

1. Déterminer le domaine D de définition de g.
2. Prouver que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et calculer g'.
3. Déterminer la limite de la suite $(g(n))_{n \geqslant 2}$.
4. En déduire une expression de g.