CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans ce chapitre, on fixe un entier $p \geqslant 1$. On s'intéresse aux fonctions de p variables, définies sur un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs réelles. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

I. Introduction

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs réelles. Le chapitre des espaces vectoriels normés permet de donner un sens à la continuité de telles fonctions.
Pour rappel, une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est continue sur U si :

$$\forall a \in \mathrm{U}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathrm{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \implies \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

autrement dit si, pour tout $a \in \mathrm{U}$, on a $f(x)$ qui tend vers $f(a)$ dans $\mathbb{R}$ lorsque x tend vers a dans $\mathbb{R}^p$.
Par caractérisation séquentielle, c'est équivalent au fait que pour tout $a \in \mathrm{U}$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.
On rappelle également que si f est lipschitzienne sur U, elle est continue sur U.

Dans la suite, si $f : (x_1,\dots,x_p) \in \mathrm{U} \mapsto f(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}$, on appelle *application partielle* de la fonction f toute fonction de la forme $x_i \mapsto f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_p)$ pour $i \in [\![1,p]\!]$ et $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$ fixé.

Proposition 1 [Continuité et applications partielles]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est continue sur U alors toute application partielle de f est continue.

Preuve

Exemple Attention, la réciproque de la proposition précédente est fausse : toutes les applications partielles de f peuvent être continues sans que f le soit.
C'est le cas par exemple de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

II. 1. Dérivées partielles et classe $\mathscr{C}^1$

Définition 1 [Dérivées partielles]

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction et $j \in [\![1, p]\!]$.
On dit que f admet une *dérivée partielle par rapport à la j−ème variable en $a = (a_1, \ldots, a_p)$* si l'application partielle $x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_p)$ admet une dérivée en a_j.
Dans ce cas, on note cette dérivée partielle :

$$\partial_j f(a) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Si f admet une dérivée partielle par rapport à la j−ème variable en tout point de U, l'application définie sur U par $a \mapsto \partial_j f(a)$ est la *dérivée partielle par rapport à la j−ème variable de f*.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$. On peut montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Définition 2 [Fonction de classe $\mathscr{C}^1$]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^1$* sur U si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur U.

Notation L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U sera noté $\mathscr{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})$.

Exemples

- Une fonction constante sur U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U puisque ses dérivées partielles existent clairement et sont nulles donc continues sur U.
- Pour $i \in [\![1, p]\!]$, l'application $\pi_i : x \in \mathbb{R}^p \mapsto x_i$ qui à un point $x \in \mathbb{R}^p$ associe sa i−ème composante dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
- Plus généralement, toute application linéaire $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

Théorème 1 [Théorème fondamental du calcul différentiel]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f admet en tout point a de U un développement limité à l'ordre 1, c'est-à-dire que pour tout $h = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h$ soit dans U, on peut écrire :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) + o(h)$$

Preuve Admis.

Remarque Pour rappel, la quantité $o(h)$ peut s'écrire $o(h) = \varepsilon(h)\|h\|$ pour une certaine fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 lorsque h tend vers 0. Autrement dit, $o(h)/\|h\|$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Proposition 2 [Classe $\mathscr{C}^1$ implique continuité]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f est continue sur U.

Preuve

II. 2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Proposition 3 [Combinaison linéaire]

Soient f et g deux fonctions définies sur U et à valeurs réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \partial_j(\lambda f + g) = \lambda \partial_j f + \partial_j g$$

En particulier, l'ensemble $\mathscr{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{U}, \mathbb{R})$.

Preuve Sans difficulté.

Proposition 4 [Produit]

Soient f et g deux fonctions définies sur U et à valeurs réelles.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors fg est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g)$$

Preuve Sans difficulté.

Proposition 5 [Cas des fonctions polynomiales]

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une application polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une partie finie I de $\mathbb{N}^p$ et une famille de scalaires $(\lambda_{k_1,\dots,k_p})_{(k_1,\dots,k_p)\in \mathrm{I}}$ tels que :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{(k_1,\dots,k_p)\in \mathrm{I}} \lambda_{k_1,\dots,k_p} x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$$

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

Preuve

Proposition 6 [Composition par une fonction de la variable réelle]

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction et $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de la variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ tel que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{I}$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \partial_j(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f) \times \partial_j f$$

Preuve Sans difficulté.

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \ln(x^2 y^2 + x^4 + 1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on a d'une part que $(x, y) \mapsto x^2 y^2 + x^4 + 1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et d'autre part que la fonction ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 7 [Inverse]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction ne s'annulant pas.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors $1/f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \partial_j\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial_j f}{f^2}$$

Preuve Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec la fonction de la variable réelle $\varphi : x \mapsto 1/x$. En effet, on a d'une part que la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et d'autre part que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Proposition 8 [Quotient]

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction et $g : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction ne s'annulant pas.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f/g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \partial_j\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\partial_j f)g - f(\partial_j g)}{g^2}$$

Preuve On écrit que $f/g = f \times 1/g$ et on utilise les résultats déjà démontrés concernant le produit et l'inverse.

II. 3. Différentielle

Définition 3 [Différentielle]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
On appelle *différentielle de f en $a \in \mathrm{U}$*, notée $\mathrm{d}f(a)$, l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(h_1, \ldots, h_p) \longmapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a)$$

Remarques

- Si $a \in \mathrm{U}$ est fixé, il est facile de vérifier que $\mathrm{d}f(a)$ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
- Si $h \in \mathbb{R}^p$, on note $\mathrm{d}f(a)(h)$ ou encore $\mathrm{d}f(a) \cdot h$ l'image du vecteur h par l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$.
- On appelle *différentielle de f*, notée $\mathrm{d}f$, l'application $a \mapsto \mathrm{d}f(a)$ définie de U dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.
- La différentielle permet une nouvelle écriture du théorème fondamental du calcul différentiel : si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h$ soit dans U, on peut écrire :

$$f(a + h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + o(h)$$

II. 4. Règle de la chaîne

Théorème 2 [Dérivation le long d'un arc $\mathscr{C}^1$]

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $x_1, \dots, x_p$ des fonctions de la variable réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ telles que $(x_1(t), \dots, x_p(t)) \in \mathrm{U}$ pour tout $t \in \mathrm{I}$.
Alors la fonction $g : t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad g'(t) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t) \partial_j f(x_1(t), \dots, x_p(t))$$

Preuve

Remarques

- En notant $\gamma : t \in \mathrm{I} \mapsto (x_1(t), \dots, x_p(t))$, les hypothèses du théorème précédent donnent que (γ, I) est un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et qu'il est tracé dans l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Ainsi, la dérivée de la fonction $g = f \circ \gamma$ est appelée *dérivée le long de l'arc* γ *de la fonction* f.
- En utilisant la différentielle de f, le résultat précédent peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad g'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Théorème 3 [Règle de la chaîne]

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$ et x et y deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^2$ telles que $(x(u,v), y(u,v)) \in \mathrm{U}$ pour tout $(u,v) \in \mathrm{V}$.
Alors la fonction $h : (u,v) \mapsto f(x(u,v), y(u,v))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V et :

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))$$

Preuve

Remarques

- On abrège parfois la règle de la chaîne en omettant les points où sont évaluées les dérivées partielles :
$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}$$
- On peut tout à fait généraliser la règle de la chaîne pour une fonction du type :
$$h : (u_1, \dots, u_q) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_q), \dots, x_p(u_1, \dots, u_q))$$
où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ et $x_1, \dots, x_p$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^q$ telles que $(x_1(u_1, \dots, u_q), \dots, x_p(u_1, \dots, u_q)) \in \mathrm{U}$ pour tout $(u_1, \dots, u_q) \in \mathrm{V}$:
$$\forall i \in [\![1, q]\!], \quad \frac{\partial h}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Exemple [Coordonnées polaires]

On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on définit une fonction h sur $\mathbb{R}^2$ permettant de passer en *coordonnées polaires* en posant :
$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, \quad h(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Proposition 9 [Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^p$.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f est constante sur U si et seulement si $\mathrm{d}f = 0$ sur U, c'est-à-dire si $\partial_j f = 0$ sur U pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

Preuve

Remarque La convexité de U est importante. En effet, la fonction f définie sur l'ouvert non convexe $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 1$ si $x > 0$ et $f(x, y) = -1$ si $x < 0$ vérifie $\mathrm{d}f = 0$ sur U malgré qu'elle ne soit pas constante.

II. 5. Gradient

Dans cette sous-partie, on munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire canonique noté $(\cdot\,|\,\cdot)$.

Définition 4 [Gradient]

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in U$.
On appelle *gradient de f en a*, noté $\nabla f(a)$, le vecteur de $\mathbb{R}^p$ défini par :

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_p f(a))$$

L'application définie sur U par $a \mapsto \nabla f(a)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est le *gradient de f*.

Exemple En physique, la *première loi de Fourier* relie le vecteur densité de flux thermique $\boldsymbol{j_Q}$ au gradient de la température T par la relation $\boldsymbol{j_Q} = -\lambda \nabla T$ où λ est la conductivité thermique.

Remarque Les opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ permettent d'écrire, sous les mêmes notations et hypothèses que précédemment, les relations suivantes :

$$\nabla(\lambda f + g) = \lambda \nabla f + \nabla g, \qquad \nabla(fg) = g\nabla f + f \nabla g, \qquad \nabla(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\nabla f \qquad \text{et} \qquad \nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\nabla f}{f^2}$$

Proposition 10 [Expression de la différentielle en fonction du gradient]

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in U$. Alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = (\nabla f(a) \,|\, h)$$

Preuve

III. Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

III. 1. Dérivées partielles d'ordre 2 et classe $\mathscr{C}^2$

Définition 5 [Dérivées partielles d'ordre 2]

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$.
On dit que f admet une *dérivée partielle d'ordre 2 par rapport aux i−ème et j−ème variables* si la dérivée partielle $\partial_i(\partial_j f)$ de $\partial_j f$ existe sur U. Dans ce cas, on note cette dérivée partielle :

$$\partial^2_{i,j} f \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Remarque Les notations précédentes précisent l'ordre des variables par rapport auxquelles on dérive successivement, c'est-à-dire que la dérivée partielle seconde $\partial^2_{i,j} f$ est obtenue en dérivant f d'abord par rapport à la variable x_j puis par rapport à la variable x_i.
Le théorème de Schwarz, énoncé plus loin, permettra d'affirmer que cet ordre est en fait sans importance pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Définition 6 [Fonction de classe $\mathscr{C}^2$]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est *de classe* $\mathscr{C}^2$ sur U si toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 sont définies et continues sur U.

Notation L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U sera noté $\mathscr{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$.

Exemples

- On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + x^2 y + y^3$.

- Plus généralement, toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$.

Remarque [Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$]

Concernant les opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, les mêmes résultats que pour la classe $\mathscr{C}^1$ peuvent être énoncés. C'est-à-dire que la classe $\mathscr{C}^2$ est stable par combinaison linéaire, produit, composition par une fonction de la variable réelle de classe $\mathscr{C}^2$ et inverse et quotient si le dénominateur ne s'annule pas.

III. 2. Théorème de Schwarz

Théorème 4 [Théorème de Schwarz]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Preuve Admis.

Remarques

- Ainsi, si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut calculer ses dérivées partielles secondes sans se soucier de l'ordre des variables par rapport auxquelles on dérive successivement.
- Attention, les dérivées partielles croisées $\partial^2_{i,j} f$ et $\partial^2_{j,i} f$ peuvent exister sans être égales. Si elles sont en plus continues, elles le seront, puisqu'on aura alors f de classe $\mathscr{C}^2$ et que le théorème de Schwarz s'appliquera.

IV. Applications du calcul différentiel

IV. 1. Courbes planes

Dans cette sous-partie, on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique $(\cdot \mid \cdot)$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$.
On désigne par U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Définition 7 [Courbe plane]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
L'ensemble Γ des points $(x, y) \in \mathrm{U}$ du plan $\mathbb{R}^2$ vérifiant la relation $f(x, y) = 0$ est appelé *courbe plane d'équation cartésienne* $f(x, y) = 0$.

Exemples

- Si $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, la courbe plane d'équation cartésienne $y - \varphi(x) = 0$ est la courbe représentative de la fonction φ dans le plan.
- La courbe plane $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec (a, b, c) un triplet de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite du plan dont un vecteur directeur est $(-b, a)$.
- La courbe plane $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est le cercle unité du plan.
- On définit deux points $\mathrm{F} = (1, 0)$ et $\mathrm{F}' = (-1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ et on s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{L}$ formé des points M du plan tels que le produit des distances FM et F′M soit égal à 1, c'est-à-dire défini par l'équation cartésienne $((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) - 1 = 0$. La courbe plane $\mathscr{L}$ est une *lemniscate de foyers* F *et* F′.

Remarque [Théorème des fonctions implicites et paramétrisation]

On se donne $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et note Γ la courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.

- Lorsqu'il existe une fonction γ définie sur un ensemble E vérifiant l'identité $\gamma(\mathrm{E}) = \mathrm{Im}\,\gamma = \Gamma$, on dit que la fonction γ est une *paramétrisation de* Γ.
- Avec l'équation $f(x, y) = 0$, on pourrait espérer, au moins *localement*, c'est-à-dire au voisinage de tout point de Γ, exprimer y en fonction de x et obtenir ainsi une équation du type $y = \varphi(x)$. Ceci permettrait d'interpréter le tracé de la courbe plane Γ comme un ensemble de tracés de courbes représentative de fonctions d'une variable réelle. À défaut, toujours *localement*, on pourrait espérer exprimer x en fonction de y sous la forme $x = \varphi(y)$.
- Ceci n'est cependant pas toujours possible et le **théorème des fonctions implicites** (hors-programme) permet de donner une condition suffisante afin que cela soit le cas. On en donne ci-après un énoncé simplifié.

Théorème 5 [Théorème des fonctions implicites – *énoncé simplifié*]

Les points $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ de Γ vérifiant la condition $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ sont des points en lesquels il est possible d'écrire sur un voisinage V_0 de M_0 :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{V}_0, \quad f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x) \quad \textbf{(1)} \quad (\text{ou } x = \varphi(y) \quad \textbf{(2)})$$

avec φ une fonction de la variable réelle de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarques

- Plus précisément, il faut écrire la paramétrisation locale de Γ sous la forme **(1)** lorsque $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ et sous la forme **(2)** lorsque $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$
- Ainsi, sur le voisinage V_0 de M_0, la courbe plane Γ est l'image d'un arc paramétré γ de classe $\mathscr{C}^1$, à savoir $\gamma : t \mapsto (t, \varphi(t))$ ou $\gamma : t \mapsto (\varphi(t), t)$ selon que la paramétrisation s'écrit **(1)** ou **(2)**. **Dans la suite, c'est sous cette forme et avec ces notations que nous utiliserons le théorème des fonctions implicites.**

DÉFINITION 8 [POINT RÉGULIER]

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et Γ la courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.

- Si $(x_0, y_0) \in \Gamma$, on dit que (x_0, y_0) est un *point régulier de* Γ si $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
- Si tous les points de Γ sont réguliers, on dit que Γ est une *courbe plane régulière*.

REMARQUE Ainsi le théorème des fonctions implicites s'applique en tout point régulier d'une courbe plane.

EXEMPLES

- La courbe plane $\mathscr{C}$ définie ci-dessus est régulière puisque, si :
$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$$
est la fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ associée à l'équation cartésienne définissant $\mathscr{C}$, on a :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$
Le gradient de f est nul uniquement en $(0,0)$, qui n'est pas un point de $\mathscr{C}$. Ainsi tout point du cercle unité est régulier et peut donc, par le théorème des fonctions implicites, être paramétrisé localement par une équation du type $y = \varphi(x)$ ou $x = \varphi(y)$ avec φ une fonction de la variable réelle de classe $\mathscr{C}^1$. On peut ici donner précisément de telles paramétrisations.
Une autre paramétrisation envisageable est $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t)$.

- La courbe plane $\mathscr{L}$ définie ci-dessus est régulière sauf au point $(0,0)$ puisque, si :
$$f : (x, y) \mapsto ((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) - 1$$
est la fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ associée à l'équation cartésienne définissant $\mathscr{L}$, on a :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 + 1))$$
Le gradient de f est nul uniquement aux points $(0,0)$, $(-1,0)$ et $(1,0)$ dont seul le premier appartient à $\mathscr{L}$.

Ainsi, tout point en dehors de l'origine du lemniscate est régulier et peut donc, par le théorème des fonctions implicites, être paramétrisé localement par une équation du type $y = \varphi(x)$ ou $x = \varphi(y)$ avec φ une fonction de la variable réelle de classe $\mathscr{C}^1$.

Définition 9 [Tangente en un point régulier d'une courbe plane]

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et Γ la courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.
Pour tout point régulier $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ de Γ, la *tangente à* Γ *en* M_0 est la droite passant par M_0 et orthogonale au vecteur $\nabla f(x_0, y_0)$, c'est-à-dire la droite d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Remarque Il est possible de justifier cette expression. En effet, le point M_0 étant régulier, le théorème des fonctions implicites assure que, sur un voisinage V_0 de M_0, Γ est l'image d'un arc paramétré γ.
D'une part, on a $f \circ \gamma = 0$. D'autre part, $f \circ \gamma$ est une fonction de la variable réelle de classe $\mathscr{C}^1$ dont la dérivée est donnée par $t \mapsto \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\nabla f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t))$.
Au point $\mathrm{M}_0 = \gamma(t_0)$, on obtient donc $(\nabla f(x_0, y_0) \mid \gamma'(t_0)) = 0$. Ainsi $\gamma'(t_0)$, qui dirige la tangente à l'arc γ en M_0 et donc la tangente à Γ en M_0, est orthogonal au gradient de f en M_0. On connaît alors un vecteur normal à la tangente, à savoir $\nabla f(x_0, y_0)$, et un point par lequel passe cette tangente, à savoir M_0. On obtient bien l'équation écrite ci-dessus.

Proposition 11 [Lignes de niveau et gradient]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on introduit la *ligne de niveau* L_λ comme étant l'ensemble des points de U vérifiant $f(x, y) = \lambda$.
Si $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ est un point de L_λ alors $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal à L_λ et est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Preuve

Exemple Dans le cas de la courbe plane $\mathscr{C}$, on peut tracer sur le cercle unité les tangente et gradient en quelques points remarquables de $\mathscr{C}$ et vérifier graphiquement les deux résultats précédents.

Remarque En physique, en reprenant la *première loi de Fourier* qui s'écrit $\boldsymbol{j_Q} = -\lambda \nabla T$, on obtient que le vecteur densité de flux thermique $\boldsymbol{j_Q}$ est orthogonal aux courbes isothermes et orienté dans le sens des températures décroissantes.

IV. 2. Surfaces

Dans cette sous-partie, on se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique $(\cdot\,|\,\cdot)$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$. On désigne par U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$.

Définition 10 [Surface]

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
L'ensemble $\mathscr{S}$ des points $(x, y, z) \in \mathrm{U}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $f(x, y, z) = 0$ est appelé *surface d'équation cartésienne* $f(x, y, z) = 0$.

Définition 11 [Point régulier]

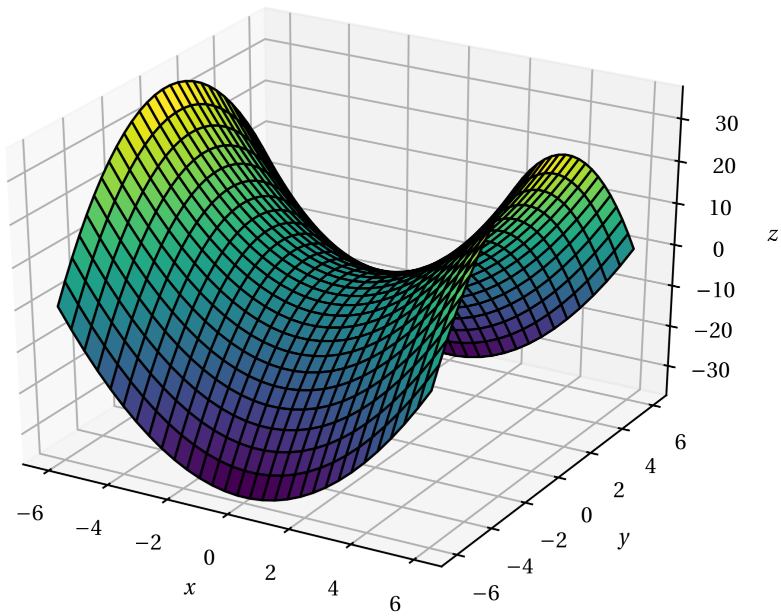
Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.

- Si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$, on dit que (x_0, y_0, z_0) est un *point régulier de* $\mathscr{S}$ si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$.
- Si tous les points de $\mathscr{S}$ sont réguliers, on dit que $\mathscr{S}$ est une *surface régulière*.

Exemples

- Si $g : \mathrm{W} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide W de $\mathbb{R}^2$, la surface d'équation cartésienne $z - g(x, y) = 0$ est la surface représentative de la fonction g dans l'espace. On peut vérifier qu'elle est régulière.
- L'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ définit une surface $\mathscr{S}$ régulière qui correspond à la sphère unité.

- L'équation cartésienne $x^2 - y^2 - z = 0$ définit une surface $\mathscr{P}_h$ régulière appelée *paraboloïde hyperbolique*. Son intersection avec un plan $z = z_0 \neq 0$ correspond à une hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = z_0^2$. Son intersection avec un plan $x = x_0$ correspond à une parabole « orientée vers le bas » d'équation $z = -y^2 + x_0^2$ et son intersection avec un plan $y = y_0$ correspond à une parabole « orientée vers le haut » d'équation $z = x^2 - y_0^2$.



Définition 12 [Plan tangent en un point régulier d'une surface]

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.
Pour tout point régulier $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathscr{S}$, le *plan tangent à* $\mathscr{S}$ *en* M_0 est le plan passant par M_0 et orthogonal au vecteur $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, c'est-à-dire le plan d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Définition 13 [Courbe tracée sur une surface]

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.
Une *courbe tracée sur la surface* $\mathscr{S}$ est une courbe paramétrée $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ définie sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ vérifiant $f(\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$, c'est-à-dire $\gamma(\mathrm{I}) \subset \mathscr{S}$.

Remarques

- Étant donnée $g : \mathrm{W} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide W de $\mathbb{R}^2$, on considère la surface notée $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $z = g(x, y)$.
  Si $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{W}$, on appelle *courbes coordonnées en* M_0 *à la surface* $\mathscr{S}$ les arcs paramétrés de classe $\mathscr{C}^1$ suivants :
  $$x \mapsto (x, y_0, g(x, y_0)) \quad \text{et} \quad y \mapsto (x_0, y, g(x_0, y))$$
  Ce sont des courbes tracées sur la surface $\mathscr{S}$. Elles sont d'ailleurs usuellement tracées par les machines puisqu'elles correspondent à un maillage de la surface dans $\mathbb{R}^3$.
  Par exemple, pour le paraboloïde hyperbolique $\mathscr{P}_h$, les courbes coordonnées sont en M_0 sont :
  $$x \mapsto (x, y_0, x^2 - y_0^2) \quad \text{et} \quad y \mapsto (x_0, y, x_0 - y^2)$$
  qui sont des paraboles dans les plans $y = y_0$ et $x = x_0$ respectivement.
- Si (I, γ) est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ tracée sur la surface $\mathscr{S}$, on peut vérifier qu'en tout point régulier M_0 de l'arc, la tangente à l'arc en M_0 est incluse dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0.

Exemple Dans le cas de la surface $\mathscr{P}_h$, on peut tracer les courbes coordonnées et s'intéresser au plan tangent à $\mathscr{P}_h$ en $\mathrm{O} = (0, 0, 0)$ ainsi qu'aux tangentes en O à toute courbe tracée sur $\mathscr{P}_h$ passant par O.

IV. 3. Extrema d'une fonction de plusieurs variables

Dans cette sous-partie, les fonctions ne sont plus forcément définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^p$. On introduit donc A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$.

Définition 14 [Extrema globaux]

Soient $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{A}$.

- On dit que f admet un *maximum (global) en* a si :
  $$\forall x \in \mathrm{A}, \quad f(x) \leqslant f(a)$$
- On dit que f admet un *minimum (global)en* a si :
  $$\forall x \in \mathrm{A}, \quad f(x) \geqslant f(a)$$
- On dit que f admet un *extremum (global) en* a si f admet un maximum ou un minimum en a.

Définition 15 [Extrema locaux]

Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$.

- On dit que f admet un *maximum local en a* s'il existe un voisinage V_a de a tel que :
$$\forall x \in V_a, \quad f(x) \leqslant f(a)$$
- On dit que f admet un *minimum local en a* s'il existe un voisinage V de a tel que :
$$\forall x \in V_a, \quad f(x) \geqslant f(a)$$
- On dit que f admet un *extremum local en a* si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Théorème 6 [Condition nécessaire pour un extremum sur un ouvert]

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in A$.
Si f admet un extremum local en a alors $\nabla f(a) = 0$.

Vocabulaire Les points a de U vérifiant $\nabla f(a) = 0$ sont appelés *points critiques de f*.

Remarques

- Le résultat précédent n'est valable que si la fonction est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un *ouvert* U.
- Ainsi, les points en lesquels f admet un extremum sont à chercher parmi les points critiques de f. Attention, les points critiques ne correspondent pas forcément à un extremum local.

Méthode [Recherche d'extrema sur un ouvert]

On se donne une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$. On cherche à déterminer les extrema de la fonction f.

(1) On détermine les points critiques de f en résolvant l'équation $\nabla f(a) = 0$ pour $a \in U$.

(2) Pour chaque point critique a, on étudie le signe de la fonction $\delta : h \mapsto f(a+h) - f(a)$.

- Si δ est positive au voisinage de 0 (resp. globalement), f admet un minimum local (resp. global) en a ;
- Si δ est négative au voisinage de 0 (resp. globalement), f admet un maximum local (resp. global) en a ;
- Si δ n'est pas de signe constant au voisinage de 0, f n'admet pas d'extremum en a.

L'étude du signe de la fonction δ peut se faire par développement limité, calcul algébrique, minoration ou majoration, grâce au théorème des accroissements finis,...

Exemple Recherche des extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2$.

Méthode [Recherche d'extrema sur une partie]

On se donne une fonction $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}^p$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathring{\mathrm{A}}$. On cherche à déterminer les extrema de la fonction f.

(1) On détermine les extrema de f sur l'intérieur $\mathring{\mathrm{A}}$ de A grâce à la méthode précédente.
(2) On détermine les extrema de f sur $\mathrm{A} \backslash \mathring{\mathrm{A}}$. Pour cela, on peut paramétriser cet ensemble.
(3) Enfin, on fait le bilan des deux études pour obtenir les extrema de f sur A.

Exemple Recherche des extrema de la fonction f définie sur $\mathrm{D} = [1, +\infty[\times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

Remarque Les raisonnements de la méthode précédente peuvent souvent être allégés si A est une partie fermée bornée puisque, d'après le chapitre des espaces vectoriels normés, on sait dans ce cas que f admet effectivement un minimum et un maximum.

Exemple Recherche des extrema de la fonction f définie sur $\mathrm{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ par $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

IV. 4. Exemples d'équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles est une équation reliant les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables. Nous étudions ici quelques exemples.

Premier exemple

On commence par déterminer les applications $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{E$_1$}$$

Second exemple

On souhaite maintenant déterminer les applications $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \tag{E$_2$}$$

Troisième exemple : changement de variables affine

Soit $c > 0$. On cherche dans cet exemple à résoudre l'*équation de transport*, c'est-à-dire à déterminer les applications $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{E$_3$}$$

Quatrième exemple : changement de variables polaire

On introduit V le demi-plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On souhaite déterminer les applications $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{V}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{E$_4$}$$