CALCUL DIFFÉRENTIEL

T.D. N°16

EXERCICE 1 ●○○ — ÉTUDES DE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

On introduit les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet des dérivées partielles en tout point.
Étudier si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Prouver l'existence et donner la valeur de $\partial^2_{x,y} g(0,0)$ et $\partial^2_{y,x} g(0,0)$.
Étudier si g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 2 ●●○ — GÉNÉRATRICES D'UN HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de droite parallèle au plan $z = 0$ incluse dans $\mathscr{S}$.

2. Soit D la droite définie par $x = az + b$ et $y = cz + d$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que :

$$\mathrm{D} \subset \mathscr{S} \iff \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

3. Montrer qu'en tout point de $\mathscr{S}$ il passe deux droites incluses dans $\mathscr{S}$.

EXERCICE 3 ●●○ — PLANS TANGENTS D'UNE SURFACE

1. On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $xy = z^3$.
Donner les équations des plans tangents à $\mathscr{S}$ contenant la droite D d'équation $x = 2$ et $y = 3z - 3$.

2. On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.
Déterminer les points de $\mathscr{S}$ dont le plan tangent est parallèle au plan d'équation $2x + y - z = 0$.

EXERCICE 4 ●●○ — ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : CAS SIMPLES

1. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + x^2 + y^3$$

2. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2$$

3. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=1+x$$

Exercice 5 ●●○ — Équations aux dérivées partielles : changements de variables

1. Grâce à un changement de variables affine, déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

2. Grâce à un changement de variables polaire, déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{V}=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathrm{V},\quad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x$$

Exercice 6 ●●○ — Recherche d'extrema

Dans chaque cas, déterminer les extrema éventuels de la fonction f définie sur V :

1. Avec $\mathrm{V}=\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)=x^2+x^2y+y^3$ pour tout $(x,y)\in\mathrm{V}$.
2. Avec $\mathrm{V}=\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)=xe^y+ye^x$ pour tout $(x,y)\in\mathrm{V}$.
3. Avec $\mathrm{V}=[0,2]\times[-1,0]$ et $f(x,y)=x^2-2x+xy+y^2$ pour tout $(x,y)\in\mathrm{V}$.

Exercice 7 ●●● — Étude d'un minimum global

Soit u un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique dont le produit scalaire est noté $(\cdot\,|\,\cdot)$. On suppose de plus que u est à valeurs propres strictement positives. Pour $a\in\mathbb{R}^n$, on définit alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad h_a(x)=\frac{1}{2}(u(x)\,|\,x)-(a\,|\,x)$$

1. Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Prouver que h admet un unique point critique en lequel elle atteint son minimum absolu.