DEVOIR SURVEILLÉ n°1

CORRIGÉ

EXERCICE 1 – ÉTUDE D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

1. Supposons $\varphi \in \mathscr{E}$ constante. Alors il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = \mathrm{K}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{K} = \mathrm{K}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{K} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{K} = 1$$

Les fonctions constantes de $\mathscr{E}$ sont donc $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$.

2. Si $\varphi(0) = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \varphi(x+0) = \varphi(x)\underbrace{\varphi(0)}_{=0} = 0$$

Si $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors on a en particulier $\varphi(0) = 0$.
D'où le résultat par double-implication.

3. **3.1.** Comme $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0)\varphi(0)$, on a $\varphi(0)^2 = \varphi(0)$, donc $\varphi(0)(\varphi(0)-1) = 0$. Avec $\varphi(0) \neq 0$, on a $\varphi(0) = 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$$

S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0$, alors :

$$\varphi(0) = \varphi(x-x) = \underbrace{\varphi(x)}_{=0}\varphi(-x) = 0$$

ce qui est exclu puisque $\varphi(0) = 1$. Ainsi $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a donc bien $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(nx) = \big(\varphi(x)\big)^n$.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $\varphi(nx) = \varphi(0) = 1$ et $\big(\varphi(x)\big)^n = \big(\varphi(x)\big)^0 = 1$.
- **Hérédité :** Supposons la propriété vérifiée au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\varphi((n+1)x) = \varphi(nx + x) = \varphi(nx)\varphi(x) = \big(\varphi(x)\big)^n \varphi(x) = \big(\varphi(x)\big)^{n+1}$$

Cela conclut l'hérédité.

Ainsi on a $\varphi(nx) = \big(\varphi(x)\big)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $n \in \mathbb{N}$, on a $1 = \varphi(0) = \varphi(-nx + nx) = \varphi(-nx)\varphi(nx)$, de sorte que :

$$\varphi(-nx) = \frac{1}{\varphi(nx)} = \big(\varphi(x)\big)^{-n}$$

On a bien prouvé que $\varphi(nx) = \big(\varphi(x)\big)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3.3. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $1/m \in \mathbb{R}$, donc, d'après la question précédente appliquée à $x = 1/m$ et $n = m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\varphi(1) = \varphi\left(m \times \frac{1}{m}\right) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m$$

3.4. Soit $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \varphi(1)^{1/m}$$

La question **3.2.** avec $x = 1/m$ donne :

$$\varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi\left(n\frac{1}{m}\right) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^n = \left(\varphi(1)^{1/m}\right)^n = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}$$

3.5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$$

Donc, en divisant par 10^n :

$$x - 10^{-n} < x_n \leqslant x.$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

3.6. Remarquons pour commencer que la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto (\varphi(1))^x = \exp(x\ln(\varphi(1)))$ est continue sur $\mathbb{R}$ (on rappelle que $\varphi(1) > 0$ par **3.1.**). Si $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) \qquad \text{(par continuité de } \varphi \text{ en } x\text{)}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}\right) \qquad \text{(par définition de } x_n\text{)}\\
&= \lim_{n\to+\infty} (\varphi(1))^{\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}} \qquad \text{(d'après la question } \mathbf{3.4.} \text{ avec } n = \lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{ et } m = 10^n \in \mathbb{N}^*\text{)}\\
&= \lim_{n\to+\infty} (\varphi(1))^{x_n} = \lim_{n\to+\infty} g(x_n)\\
&= g(x) = (\varphi(1))^x \qquad \text{(par continuité de } g \text{ en } x\text{)}
\end{aligned}$$

4. La question **3.** montre que si $\varphi(0) \neq 0$ alors il existe $a > 0$ ($a = \varphi(1)$) telle que $\varphi : x \mapsto a^x$. Réciproquement, on peut vérifier que les fonctions $x \mapsto a^x$ sont dans $\mathscr{E}$. Enfin, les questions **1** et **2** montrent que si $\varphi(0) = 0$ alors $\varphi = 0$ et que réciproquement la fonction nulle est bien dans $\mathscr{E}$. On conclut que :

$$\mathscr{E} = \{x \mapsto 0\} \cup \left\{x \mapsto a^x,\ a > 0\right\}$$

Exercice 2 – Étude d'une suite récurrente

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge vers une limite $\ell \geqslant u_0 > 0$ qui vérifie $\ell = \ell + \ell^2$ (en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence de la suite), ce qui donne $\ell = 0$, ce qui est contradictoire. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et elle diverge vers $+\infty$.

2. **2.1.** Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+p+1} - v_{n+p} &= \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln(u_{n+p+1}) - \frac{1}{2^{n+p}}\ln(u_{n+p})\\
&= \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln(u_{n+p} + u_{n+p}^2) - \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln(u_{n+p}^2) = \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right)
\end{aligned}$$

Comme $0 < u_n \leqslant u_{n+p}$ par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit, par croissance de ln, que :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

2.2. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. En additionnant les encadrements précédents, on a en utilisant l'expression de la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$0 < \sum_{p=0}^{k} (v_{n+p+1} - v_{n+p}) \leqslant \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}}\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Le terme central vaut $v_{n+k+1} - v_n$ par téléscopage et il vient donc :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

2.3. De la minoration de l'encadrement de la question **2.2** avec $k = 0$, on en déduit que la suite (v_n) est (strictement) croissante. Et de la majoration pour $n = 0$, on en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée puisque cela donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} \leqslant v_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$$

Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. En faisant tendre k vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question **2.2**, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \mathrm{L} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \qquad \text{puis} \qquad 0 \leqslant 2^n(\mathrm{L} - v_n) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

et en exploitant la croissance de l'exponentielle :

$$1 \leqslant \exp(2^n(\mathrm{L} - v_n)) = \frac{t_n}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par **1.**, d'où, grâce au théorème d'encadrement des suites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n}{u_n} = 1 \qquad \text{soit} \qquad u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$$

4. **4.1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n = t_n - s_n$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ de sorte que :

$$t_{n+1} - s_{n+1} = u_{n+1} = u_n + u_n^2 = u_n + (t_n - s_n)^2 = u_n + t_n^2 - 2t_n s_n + s_n^2$$

Or $t_n^2 = t_{n+1}$ et $t_n = u_n + s_n$ d'où $s_{n+1} = s_n^2 + (2s_n - 1)u_n$.

4.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, la question **3.** donne :

$$1 \leqslant \frac{t_n}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$$

de sorte que $u_n \leqslant t_n \leqslant u_n + 1$ et donc $0 \leqslant s_n \leqslant 1$. On en déduit que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après **4.1**, puisque $u_n > 0$, on a :

$$s_n - \frac{1}{2} = \frac{s_{n+1} - s_n^2}{2u_n}$$

D'après **4.2**, $0 \leqslant s_n \leqslant 1$ d'où $0 \leqslant s_{n+1} \leqslant 1$ et $0 \leqslant s_n^2 \leqslant 1$. On a donc, par inégalité triangulaire et avec $u_n > 0$:

$$\left|s_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{|s_{n+1}| + |s_n^2|}{2u_n} \leqslant \frac{1}{u_n}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, d'où, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} |s_n - 1/2| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1/2$. On obtient finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} (t_n - u_n) = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad t_n - u_n = \frac{1}{2} + o(1) \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = t_n - \frac{1}{2} + o(1)$$

Exercice 3 – Calcul de la somme d'une série alternée

Partie A – Préliminaires

1. On a, par développement de $u \mapsto \ln(1+u)$ lorsque u tend vers 0 :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série de terme général $1/n^2$ étant convergente, on en déduit par comparaison que la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente et donc convergente.

2. En introduisant les sommes partielles $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la série étudiée :

$$\forall n \geqslant 1, \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k)$$

on a, par téléscopage, la relation $V_{n-1} = u_n - u_1$ pour $n \geqslant 2$. La série étudiée étant convergente, la suite $(V_{n-1})_{n\geqslant 2}$ est convergente et il en est donc de même de la suite $(u_n)_{\geqslant 2} = (V_{n-1} + u_1)_{n\geqslant 2}$. Cela donne le résultat.

3. **3.1.** La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall t > 0, \quad h'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

Une étude de signe du numérateur donne que h est croissante sur $]\,0\,,e\,]$ et décroissante sur $[\,e\,,+\infty[$.

3.2. La fonction h est décroissante sur $[e, +\infty[$ et donc sur $[3, +\infty[$. Ainsi :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \forall t \in [n, n+1], \quad \frac{\ln(t)}{t} \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 4, \quad \forall t \in [n-1, n], \quad \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \frac{\ln(t)}{t}$$

En intégrant ces inégalités respectivement sur $[n, n+1]$ et $[n-1, n]$, on obtient par croissance de l'intégrale les inégalités demandées.

4. Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \\
&= (-1)^{2n+2} \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + (-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
&= h(2n+2) - h(2n+1) \leqslant 0
\end{aligned}$$

par décroissance de h sur $[\,3\,,+\infty\,[$ avec le fait que $2n+1$ et $2n+2$ sont supérieurs à 3 puisque $n \geqslant 1$. On prouve ainsi que la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Enfin, si $n \geqslant 1$, on a, par croissance comparée :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = (-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On conclut que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. Par le cours, elles sont donc convergentes et de même limite. Par propriété des suites extraites, cela donne que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie B – Calcul de S

5. Pour $n \geqslant 3$, on a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2\right)$$

La seconde inégalité de la question **3.2.** en changeant n en $n+1$ (on a bien $n+1 \geqslant 4$ puisque $n \geqslant 3$) :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln^2(t)\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2\right)$$

On obtient donc $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$ pour $n \geqslant 3$ et la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

6. En utilisant cette fois la première inégalité de **3.2.** et en sommant, on a, pour $n \geqslant 3$:

$$t_n = \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \geqslant \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=3}^{n} \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\, \mathrm{d}t$$

Avec la relation de Chasles et après calcul de l'intégrale, il vient :

$$t_n \geqslant \frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}$$

Cela donne :

$$a_n \geqslant \frac{\ln 2}{2} + \underbrace{\frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln n^2}{2}}_{\geqslant 0} - \frac{(\ln(3))^2}{2} \geqslant \frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}$$

La suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est donc minorée. Étant décroissante, elle converge.

7. Soit $n \geqslant 3$. On découpe S_{2n} en deux parties contenant respectivement les indices pairs et impairs.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$

Dans la seconde somme, on ajoute les termes pairs :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)+\ln(k)}{k} - t_{2n}$$

En scindant la première somme, on a donc :

$$S_{2n} = t_n - t_{2n} + \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

En faisant intervenir les suites u_n et a_n :

$$S_{2n} = (u_n + \ln n)\ln(2) + a_n + \frac{(\ln n)^2}{2} - a_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2}$$

On écrit enfin que :

$$\frac{(\ln(2n))^2}{2} = \frac{(\ln n + \ln 2)^2}{2} = \frac{(\ln n)^2}{2} + \ln n \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

et on conclut :

$$S_{2n} = u_n \ln 2 + (a_n - a_{2n}) - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

8. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et la suite extraite $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge vers la même limite. Cela donne que la suite $(a_n - a_{2n})_{n\geqslant 1}$ tend vers 0. Ainsi :

$$S_{2n} = u_n \ln 2 + (a_n - a_{2n}) - \frac{(\ln 2)^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

Enfin, $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ étant une extraite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers S, elle converge également vers S. Par unicité de la limite, il vient :

$$S = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

Exercice 4 – Polynômes et nombres de Bernoulli

Partie A – Étude d'un endomorphisme

1. Soit $i \in \{0,\dots,n\}$. On a, par application de la formule du binôme de Newton :

$$\psi_n(X^i) = \left[\frac{t^{i+1}}{i+1}\right]_X^{X+1} = \frac{1}{i+1}((X+1)^{i+1} - X^{i+1}) = \sum_{j=0}^{i+1} \frac{1}{i+1}\binom{i+1}{j} X^j - X^{i+1} = \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{i+1}\binom{i+1}{j} X^j$$

2. Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ on déduit par linéarité de l'intégrale que $\psi_n(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i \psi_n(X^i)$. Comme le degré de $\psi_n(X^i)$ est inférieur ou égal à i d'après la question précédente, $\psi_n(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

3. L'application ψ_n est linéaire par linéarité de l'intégrale et elle va de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question précédente, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. D'après la formule obtenue en **1.**, la matrice A de ψ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une matrice carrée d'ordre $n+1$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{j}\dbinom{j}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. La matrice A de ψ_n est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale puisque $a_{i,i} = 1$ pour $i \in [\![1,n+1]\!]$. Elle est donc inversible ($\det(A) = 1$) et ψ_n est donc bijectif.

6. Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$.

6.1. Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, le polynôme $Q = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} a_i X^{i+1}$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ convient.

6.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\psi_n(P)(x) = [Q(t)]_x^{x+1} = Q(x+1) - Q(x)$$

6.3. Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\psi_n(P)'(x) = Q'(x+1) - Q'(x) = P(x+1) - P(x) = \psi_n(P')(x)$. Ceci prouve $\psi_n(P)' = \psi_n(P')$.

Partie B – Polynômes et nombres de Bernoulli

7. On procède par récurrence.

- **Initialisation :** $S_0 = 1$ existe et est unique.
- **Hérédité :** Supposons l'existence et l'unicité de $S_0, \ldots, S_k$. Supposons que S_{k+1} existe. La condition **(2)** indique qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_{k+1}(x) = (k+1)\int_0^x S_k(t)\,\mathrm{d}t + C$$

En posant $Q_k(x) = (k+1)\int_0^x S_k(t)$ pour $x \in \mathbb{R}$, Q_k est bien un polynôme et la condition **(3)** est vérifiée si et seulement si $C = -\int_0^1 Q_k(t)\,\mathrm{d}t$. On vient de prouver l'unicité de S_{k+1}. Enfin, grâce à cette phase d'analyse, on peut mener la synthèse et prouver l'existence de S_{k+1} en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_{k+1}(x) = (k+1)\int_0^x S_k(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \left((k+1)\int_0^t S_k(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

et en vérifiant que cela convient.

D'où le résultat par principe de récurrence.

8.
- On sait que $S_1' = S_0 = 1$ de sorte que $S_1 = X + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. La condition $\int_0^1 S_1 = 0$ est vérifiée, après calculs, si et seulement si $C = -\frac{1}{2}$. Ainsi $S_1 = X - \frac{1}{2}$.
- Avec le même type d'approche, on trouve $S_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$. et $S_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$.

9. On le montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Si $k = 0$, on a $S_0 = 1$ qui est bien unitaire de degré 0.
- **Hérédité :** Supposons que S_k soit un polynôme unitaire de degré k. De $S_{k+1}' = (k+1)S_k$, on déduit que le terme dominant de S_{k+1} est X^{k+1}. Ainsi S_{k+1} est bien un polynôme unitaire de degré $k+1$.

La propriété est démontrée par récurrence.

10. Pour $k \geqslant 2$, on a, avec les conditions **(2)** et **(3)** appliquées respectivement à $k \geqslant 1$ et $k-1 \geqslant 1$:

$$S_k(1) - S_k(0) = \int_0^1 S_k'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 kS_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

11. Considérons la suite $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par $T_m(x) = (-1)^m S_m(1-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et montrons qu'elle vérifie les conditions de la question **7**.

- $T_0(x) = (-1)^0 S_0(1-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- Si $k \geqslant 0$, $T_{k+1}'(x) = (-1)^{k+1} \times (-1) \times S_{k+1}'(1-x) = (-1)^k(k+1)S_k(1-x) = (k+1)T_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

- Pour $k \geqslant 1$, on a avec le changement de variable affine $u = 1 - t$:

$$\int_0^1 \mathrm{T}_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (-1)^k \mathrm{S}_k(1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (-1)^k \mathrm{S}_k(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

Par unicité de la suite $(\mathrm{S}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, on en déduit $\mathrm{T}_m = \mathrm{S}_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cela donne le résultat souhaité.

12. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que S_k convient, l'unicité résultant du fait que ψ_n est bijectif.

- **Initialisation :** Pour $k = 0$, on a $\psi_n(\mathrm{S}_0)(\mathrm{X}) = \psi_n(1)(\mathrm{X}) = 1$.
- **Hérédité :** Supposons pour un entier $k \in \mathbb{N}$ que $\psi_n(\mathrm{S}_k)(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^k$. D'après **6.3.** et avec la condition **(2)**, il vient $\psi_n(\mathrm{S}_{k+1})'(\mathrm{X}) = \psi_n((k+1)\mathrm{S}_k)(\mathrm{X}) = (k+1)\mathrm{X}^k$. On en déduit $\psi_n(\mathrm{S}_{k+1})(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{k+1} + \mathrm{C}$, la constante C étant donnée par $\mathrm{C} = \psi_n(\mathrm{S}_{k+1})(0) = \int_0^1 \mathrm{S}_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ avec la condition **(3)**.

On a bien démontré la propriété par récurrence.

13. Avec la question **8.**, on obtient :

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \sigma_2 = \frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad \sigma_3 = 0$$

14. Soit $k \geqslant 3$. On a $\mathrm{S}_k(0) = \mathrm{S}_k(1)$ d'après la question **10.** mais aussi, si k est impair, que $\mathrm{S}_k(0) = -\mathrm{S}_k(1)$ en appliquant en $x = 1$ la relation de la question **11.** On a donc $\sigma_k = \mathrm{S}_k(0) = 0$.

15. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Si $n = 0$, on a $\mathrm{S}_0(x) = 1 = \sigma_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- **Hérédité :** Supposons pour $n \geqslant 0$ que $\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sigma_k x^{n-k}$ pour tout réel x. En intégrant la relation $\mathrm{S}'_{n+1} = (n+1)\mathrm{S}_n$ donnée par la condition **(2)**, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{S}_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k}\sigma_k x^{n-k+1} + \mathrm{C}$$

avec $\mathrm{C} = \mathrm{S}_{n+1}(0) = \sigma_{n+1}$. En écrivant :

$$\frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k} = \frac{(n+1)n!}{(n-k+1)k!(n-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

on obtient bien finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{S}_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}\sigma_k x^{n+1-k}$$

La propriété est donc démontrée par récurrence.

16. Avec la question **10.**, pour $n \geq 2$, on a $\mathrm{S}_n(1) = \mathrm{S}_n(0) = \sigma_n$ de sorte que, en appliquant en $x = 1$ le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\sigma_k = 0$$

⋆ ⋆
⋆