

T.D. N°1



EXERCICE 1 ÉCHAUFFEMENT

1. Résoudre l'équation suivante sur \mathbb{R} :

$$x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$$

2. Résoudre l'équation suivante sur \mathbb{R} :

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{5+x} + \sqrt{4-3x}$$

3. Résoudre l'équation suivante sur \mathbb{R} :

$$\ln\left(\frac{x+5}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 5)$$

4. Résoudre le système suivant sur \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 4 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 1 \end{cases}$$

5. Résoudre l'équation suivante sur $[0, \pi]$:

$$2 \sin x = \sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}$$

6. Résoudre l'équation suivante sur \mathbb{R} :

$$\cos x = 1 + \sqrt{3} \sin x$$

7. Résoudre l'équation suivante sur \mathbb{R} :

$$\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin} 2x$$

8. Résoudre les deux équations suivantes sur \mathbb{C} :

$$\text{A. } z^2 = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{B. } z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$$

9. Résoudre l'équation $(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5$ sur \mathbb{C} de deux façons différentes.

En déduire la valeur de $\tan(\pi/5)$.

10. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier la somme suivante :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$$

EXERCICE 2 SOMME ET DIFFÉRENCE D'ARCTANGENTES

1. Pour $a > 0$ et $b > 0$, démontrer que :

$$\operatorname{Arctan}(a) - \operatorname{Arctan}(b) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

2. En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$$

3. Pour $a, b \in]-1, 1[$, établir une formule analogue à celle de la question 1. pour $\operatorname{Arctan}(a) + \operatorname{Arctan}(b)$.

4. En déduire la valeur de :

$$S = 5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{18} + 3 \operatorname{Arctan} \frac{1}{57}$$

EXERCICE 3 LIMITES DE SUITES

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$

4. $u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 + n + 3}$

7. $u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k+n^2}$

2. $u_n = \frac{3^n + n^2(-1)^n}{n! + \cos(n) \ln(n^2)}$

5. $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (x \in \mathbb{R})$

8. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx] \quad (x \in \mathbb{R})$

3. $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^{n+1}}$

6. $u_n = \left(5 \sin \frac{1}{n^2} + \frac{1}{5} \cos n\right)^n$

9. $u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}$

EXERCICE 4

SUIITE DÉFINIE PAR UNE SOMME

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 2\sqrt{n}$$

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Établir que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

EXERCICE 5

SUIITE RÉCURRENTÉ COMPLEXE

On donne $u_0 \in \mathbb{C}$ et on impose la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n - \bar{u}_n}{3}$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 6

SUIITE DE FIBONACCI

On pose $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et on impose la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$$

1. Exprimer ϕ_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

2. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+1}^2 - \phi_n \phi_{n+2} = (-1)^n$$

3. Prouver que la suite $(\phi_{n+1}/\phi_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

4. Démontrer que :

$$\text{A. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi_k = \phi_{2n}$$

$$\text{B. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \phi_k = -\phi_n$$

EXERCICE 7

SUIITE RÉCURRENTÉ LINÉAIRE D'ORDRE 2 AVEC SECOND MEMBRE

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et on impose la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n$$

Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 8SUITES DU TYPE $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans les cas suivants, étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On pourra s'intéresser à la bonne définition et aux valeurs possibles de la suite, à sa monotonie et à son éventuelle convergence.

1. On pose $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$$

2. On pose $u_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

3. On donne $u_0 \in [\frac{1}{3}, +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{2}{9}}$$

EXERCICE 9

ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTTE AVEC VITESSE DE CONVERGENCE

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en se donnant $u_0 \in \mathbb{R}$ puis en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cos(u_n)$$

1. Prouver qu'il existe un unique réel ℓ tel que $\ell = \frac{1}{2} \cos(\ell)$ et montrer que $\ell \in [0, 1]$.
2. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \ell|$$

3. Conclure quant à l'éventuelle convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Proposer un programme Python qui, étant donné un entier $k \in \mathbb{N}$, renvoie une approximation de ℓ à 10^{-k} près.

EXERCICE 10

UNE SÉRIE ALTERNÉE

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

1. En étudiant les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. Déterminer la valeur de la limite.
On pourra remarquer que :

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$$

EXERCICE 11

INÉGALITÉS CLASSIQUES

Démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq 1 + x$.
3. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
5. Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$.

EXERCICE 12

SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction f_n sur \mathbb{R}_+ en posant $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$ pour $x \geq 0$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, l'équation $e^x = x^n$ admet une unique solution, notée x_n , dans l'intervalle $[0, n]$.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 3$, $x_n \geq 1$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et en déduire qu'elle converge vers un réel noté ℓ .
4. Montrer que $\ln(x_n) = \frac{x_n}{n}$ et en déduire la valeur de ℓ .
5. Donner un équivalent de $\ln(x_n)$ puis de $x_n - 1$.

EXERCICE 13

EXISTENCE DE SOLUTION À UNE ÉQUATION

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne n réels a_1, \dots, a_n vérifiant $a_1 + \dots + a_n = 0$.

Prouver que l'équation suivante d'inconnue x a au moins une solution sur $]0, 1[$:

$$\sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = 0$$

EXERCICE 14

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Soit f la fonction définie sur $] -1, 1 [$ par :

$$\forall x \in] -1, 1 [, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1 [$.
2. Déterminer deux fonctions polynomiales non nulles p et q telles que :

$$\forall x \in] -1, 1 [, \quad p(x)f'(x) + q(x)f(x) = 0$$

3. En déduire, pour $n \geq 1$, une relation vérifiée par $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$ et $f^{(n-1)}$.
4. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(2p)}(0)$.
5. Démontrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in] -1, 1 [, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

6. Obtenir avec ce qui précède une relation entre P_{n+1} , P_n et P_{n-1} pour $n \geq 1$.

EXERCICE 15PROLONGEMENT DE CLASSE \mathcal{C}^1

On définit une fonction f sur $] -\pi/2, \pi/2 [\setminus \{0\}$ en posant :

$$\forall x \in] -\pi/2, \pi/2 [\setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

1. Démontrer que f peut se prolonger en une fonction continue sur $] -\pi/2, \pi/2 [$.
2. Le prolongement est-il de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\pi/2, \pi/2 [$?

EXERCICE 16

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Dans les cas suivants, donner le développement de la fonction f au point a à l'ordre n :

1. $f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^x + 3)$ avec $a = 0$ et $n = 2$.
2. $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$ avec $a = 0$ et $n = 4$.
3. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ avec $a = 1$ et $n = 2$.
4. $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)$ avec $a = 0$ et $n = 3$.

EXERCICE 17

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sqrt{x(x+1)}$$

1. Réaliser un développement asymptotique à trois termes de f au voisinage de $+\infty$.
2. Interpréter graphiquement ce développement.

EXERCICE 18

LIMITES DE SUITES

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
2. $u_n = \frac{1}{n} \left(n! \binom{2n}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$
3. $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}}$

EXERCICE 19

CALCUL D'INTÉGRALES

Calculer les deux intégrales suivantes en réalisant le changement de variable indiqué :

$$1. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \tan t} \quad (u = \cos t)$$

$$2. \int_0^1 \frac{e^t + 1}{e^t + e^{-t}} dt \quad (u = e^t)$$

EXERCICE 20

LIMITES DE SUITES

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

$$1. u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

$$2. u_n = \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx$$

$$3. u_n = \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx$$

EXERCICE 21

ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie par sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$$

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et donner une expression de sa dérivée.
2. Prouver que f admet 0 pour limite en $+\infty$.
On pourra réaliser une intégration par parties puis majorer l'intégrale.
3. Étudier la limite de f en 0.
On pourra commencer par s'intéresser à la limite quand x tend vers 0 de :

$$\int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

EXERCICE 22

DES INÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

On souhaite déterminer l'ensemble \mathcal{E} des fonctions f définies et continues sur \mathbb{R}_+ vérifiant :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, \quad f(x) \leq \int_0^x f(t) dt$$

1. Soit f un élément de \mathcal{E} . Étudier les variations de la fonction auxiliaire suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{-x} \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

En déduire que f est nulle.

2. Donner l'ensemble \mathcal{E} .
3. Soit K une fonction définie, continue et positive sur \mathbb{R}_+ .
Déterminer l'ensemble \mathcal{F} des fonctions f définies et continues sur \mathbb{R}_+ vérifiant :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, \quad f(x) \leq \int_0^x K(t) f(t) dt$$