DEVOIR À LA MAISON n°1

CORRIGÉ

DEUX OPÉRATIONS SUR LES POLYNÔMES

PARTIE I – TRANSLATION

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$, c'est-à-dire que $a_d \neq 0$. Alors, avec la formule du binôme de Newton, $\tau(P)$ est de la forme :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d (X+1)^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k = a_d X^d + \underbrace{a_d \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k}_{\deg \leqslant d-1}$$

Comme $a_d \neq 0$, il vient $\deg(\tau(P)) = \deg(P)$ et $\mathrm{cd}(\tau(P)) = \mathrm{cd}(P)$.

2. On prouve par récurrence que $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** On a $\tau^0(P)(X) = P(X)$.
- **Hérédité :** Si on suppose $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.

D'où le résultat par principe de récurrence.

3. D'après la formule du binôme de Newton et par changement de variable $i = h+1$, on a :

$$\forall j \in [\![1, n+1]\!], \quad \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Ainsi M est triangulaire supérieure et ses coefficients vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad M_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Puisque la matrice M est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, elle vérifie $\det(M) = 1 \neq 0$ et est donc inversible. Ainsi τ est bijective.

On considère assez naturellement $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à $P(X)$ associe $P(X-1)$. On peut facilement vérifier que $\overline{\tau}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \mathrm{id}$ puisque :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \tau(\overline{\tau}(P))(X) = \overline{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\overline{\tau}(P))(X)$$

Cela prouve que $\tau^{-1} = \overline{\tau}$.

Enfin, comme pour la question **2.**, on montre que $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ de sorte que la formule trouvée en **2.** reste valable sur $\mathbb{Z}$.

5. Avec l'expression de τ^{-1}, on applique la même méthode qu'à la question **3.** et on obtient :

$$\forall j \in [\![1, n+1]\!], \quad \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

On en déduit :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad M^{-1}_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. Si $k \in [\![0, n]\!]$, la $(k+1)-$ème ligne du calcul $V = Q \times U$ est :

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1}$$

En comparant avec la formule :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j = \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} u_{j-1}$$

on peut poser :

$$Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour} \quad j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit on a $Q = {}^t M$.

7. Puisque M est inversible, $Q = {}^t M$ l'est également et $Q^{-1} = ({}^t M)^{-1} = {}^t(M^{-1})$. De plus, on a :

$$V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = {}^t(M^{-1}) \times V$$

Si $k \in [\![0, n]\!]$, la $(k+1)-$ème ligne de ce calcul donne alors :

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} \left({}^t(M^{-1})\right)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})\right)_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^{n} \left((M^{-1})\right)_{j+1,k+1} v_j = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$$

8. On fixe $k \in \mathbb{N}$. On a, par la formule du binôme de Newton :

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k$$

De plus, on vérifie bien, toujours par la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k$$

Partie II – Différence

9. Avec les mêmes notations qu'en **1.** avec P non constant on a, grâce à la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \delta(P)(X) = P(X+1) - P(X) &= \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \\ &= a_d (X+1)^d - a_d X^d + a_{d-1}(X+1)^{d-1} - a_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} a_k [(X+1)^k - X^k] \\ &= a_d \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k + \underbrace{a_{d-1} \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d-1}{k} X^k + \sum_{k=0}^{d-2} a_k [(X+1)^k - X^k]}_{\deg \leqslant d-2} \end{aligned}$$

Comme $a_d \neq 0$, il vient $\deg(\delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1$ et $\mathrm{cd}(\delta(P)) = d a_d = \deg(P) \times \mathrm{cd}(P)$.

10. D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geqslant 1$ et $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, par contraposée, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.

Réciproquement, si P est constant égal à $a \in \mathbb{R}$, on a bien $\delta(P) = P(X+1) - P(X) = a - a = 0$. On conclut :

$$\mathrm{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$$

La question précédente montre aussi que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\mathrm{Ker}(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut que :

$$\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

11. On va montrer que $\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ pour $j \in [\![1, n]\!]$ par récurrence.

- **Initialisation :** Si $j = 1$, le résultat a été prouvé à la question précédente.
- **Hérédité :** On suppose $\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ pour un $j \in [\![1, n-1]\!]$. Si $P \in \mathrm{Ker}(\delta^{j+1})$ alors $\delta^{j+1}(P) = 0$, soit $\delta^j(\delta(P)) = 0$, ce qui donne $\delta(P) \in \mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ par hypothèse de récurrence. Dès lors :
  - Si P est non constant, la question **9.** donne $\deg(P) = \deg(\delta((P)) + 1 \leqslant (j-1) + 1 = j$ de sorte que $P \in \mathbb{R}_j[X]$.
  - Si P est constant, on a aussi $P \in \mathbb{R}_j[X]$.

  On a donc prouvé $\mathrm{Ker}(\delta^{j+1}) \subset R_j[X]$.

  Réciproquement, on se donne $P \in \mathbb{R}_j[X]$.
  - Si P est non constant, la question **9.** donne que $\delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X] = \mathrm{Ker}(\delta^j)$ de sorte que $\delta^j(\delta(P)) = 0$, c'est-à-dire $\delta^{j+1}(P) = 0$ soit $P \in \mathrm{Ker}(\delta^{j+1})$.
  - Si P est constant, on vérifie facilement que $P \in \mathrm{Ker}(\delta^{j+1})$.

  Finalement, on a $\mathrm{Ker}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_j[X]$.

D'où le résultat par principe de récurrence.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Si $P \in \mathrm{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$. Avec la question **9.**, on montre par récurrence sur j que l'on a $\deg P \leqslant n - j$.

- **Initialisation :** Si $j = 1$, on doit montrer que $\deg(\delta(Q)) \leqslant n - 1$. Deux cas se produisent :
  - Si Q est constant alors $\delta(Q) = 0$ et on a bien $\deg(\delta(Q)) \leqslant n - 1$.
  - Sinon, avec la question **9.**, on a $\delta(Q)$ de degré $\deg(Q) - 1 \leqslant n - 1$.
- **Hérédité :** On suppose $\delta^j(Q)$ de degré inférieur à $n - j$ pour un $j \in [\![1, n-1]\!]$. Deux cas se produisent :
  - Si $\delta^j(Q)$ est constant alors $\delta^{j+1}(Q) = 0$ et on a bien $\deg(\delta^{j+1}(Q)) \leqslant n - j - 1$.
  - Sinon, avec la question **9.**, on a $\delta^{j+1}(Q)$ de degré $\deg(\delta^j(Q)) - 1 \leqslant n - j - 1$.

D'où le résultat annoncé. Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$ et $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$. Comme en **10.**, le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

12. Notons Δ la matrice de δ dans la base $(P_k)_{k \in [\![1, n+1]\!]}$. Par construction de $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a $\Delta = M - I_{n+1}$. Comme M commute avec I_{n+1}, la formule du binôme de Newton donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} M^j$$

En revenant aux endomorphismes, il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \delta^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j$$

13. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Ker}(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc, avec la question précédente :

$$0 = \delta^n(P)(X) = \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) \right)(X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (\tau^j(P)(X)) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X + j)$$

En particulier, en évaluant cette relation en la valeur réelle $X = 0$:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0$$

14. 14.1. En utilisant la relation $u^2 = \delta$, on a $u \circ \delta^2 = u \circ \delta \circ \delta = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta \circ \delta \circ u = \delta^2 \circ u$. On conclut bien que u et δ^2 commutent.

14.2. Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Ker}\, \delta^2$. Alors, puisque u et δ^2 commutent, on a $\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$. On a donc $u(P) \in \mathrm{Ker}(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$. Cela prouve que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u.

14.3. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En identifiant, il vient $a = d$ et $c = 0$.

On a donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$.

En identifiant de nouveau, on a $a^2 = 0$ soit $a = 0$ et $2ab = 1$, ce qui n'est pas possible.

14.4. Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u, notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ qui à P associe $u(P)$ l'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_1[X]$. Considérons A, la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$. Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbb{R}_1[X]$ à savoir :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or d'après la question précédente, ceci est impossible.

15. 15.5. De façon similaire à ce qui a été fait au sein de la question **11.**, on peut prouver par récurrence avec la question **9.** que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$. Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots \delta^d(P))$ est une famille de polynômes non nuls echelonnée en degrés. Par le cours, c'est donc une famille libre. De plus, les degrés de ces polynômes sont $[\![0, d]\!]$ de sorte que $\mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]$.

15.6. Soit V un sous-espace stable par δ.

Si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et donc $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^n(P)) \subset V \quad (\star)$.

V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$ et $(e_0, \dots e_d)$ une base de V. Nécessairement, l'un des e_i est un polynôme de degré supérieur ou égal à d. En effet, sinon, on aurait une famille libre de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, ce qui est impossible. Donc il existe P dans V de degré $r \geqslant d$.

Si $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^r(P)) \subset V$ et V ne peut être de dimension $d+1$.

Donc il existe P de degré d dans V et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ avec $(\star)$. Par égalité des dimensions, il vient $\mathbb{R}_d[X] = V$.

Partie III – Une famille de polynômes

Généralités

16. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\deg(H_k) = k$. Ainsi la famille $(H_0, H_1, \dots H_n)$ est formée de polynômes non nuls et échelonnés en degrés. Par le cours, elle est libre. Étant constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, elle forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

17. On a $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$. De plus, pour $k \in [\![1, n]\!]$, il vient, avec un changement de variable $\ell = j - 1$:

$$\begin{aligned}\delta(H_k)(X) = H_k(X+1) - H_k(X) &= \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right) = \frac{1}{k!}\left((X+1)\prod_{\ell=0}^{k-2}(X-\ell) - (X-k+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right) \\ &= \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-\ell)\right)((X+1)-(X-k+1)) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right) \times k = H_{k-1}(X)\end{aligned}$$

En conclusion, on a $\delta(H_0) = 0$ et $\delta(H_k) = H_{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

18. Comme $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a avec la question précédente que $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi M′ est exactement la matrice de τ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent, M et M′ sont semblables puisque ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

19. Soient $k, \ell \in [\![0, n]\!]$.

- Si $\ell \geqslant k$, une récurrence simple avec la question précédente montre que $\delta^k(H_\ell) = H_{\ell-k}$.
- Si $\ell < k$, on a de même $\delta^\ell(H_\ell) = H_0 = 1$ et donc $\delta^k(H_\ell) = \delta^{k-\ell-1}(\delta(\delta^\ell(H_\ell))) = \delta^{k-\ell-1}(\delta(H_0)) = \delta^{k-\ell-1}(0) = 0$.

Comme $H_i(0) = 0$ dès que $i \neq 0$ et $H_0(0) = 1$, il vient en appliquant en 0 :

$$\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \ell = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

20. Puisque $(\mathrm{H}_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, pour tout $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, il existe $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{P} = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \mathrm{H}_\ell$. Puis, par linéarité, il vient, en utilisant la question précédente :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\quad \delta^k(\mathrm{P})(0) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \delta^k(\mathrm{H}_\ell)(0) = a_k$$

Cela donne bien :

$$\forall \mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}],\quad \mathrm{P} = \sum_{k=0}^n \delta^k(\mathrm{P})(0)\mathrm{H}_k$$

Étude d'un exemple

21. On utilise la question **20.** Si $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3+2\mathrm{X}^2+5\mathrm{X}+7$, on calcule les $\delta^k(\mathrm{T})(0)$, pour k allant de 0 à 3. On a :

$$\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3+2\mathrm{X}^2+5\mathrm{X}+7,\quad \delta(\mathrm{T})(\mathrm{X}) = 3\mathrm{X}^2+7\mathrm{X}+8,\quad \delta^2(\mathrm{T})(\mathrm{X}) = 6\mathrm{X}+10 \quad\text{et}\quad \delta^3(\mathrm{T})(\mathrm{X}) = 6$$

de sorte que $\mathrm{T} = 6\mathrm{H}_3+10\mathrm{H}_2+8\mathrm{H}_1+7\mathrm{H}_0$.

22. Puisque $\delta^2(\mathrm{H}_k) = \mathrm{H}_{k-2}$ pour $k\in[\![2,n]\!]$ d'après **17.**, on a par linéarité, en posant $\mathrm{P} = 6\mathrm{H}_5+10\mathrm{H}_4+8\mathrm{H}_3+7\mathrm{H}_2$, la relation $\delta^2(\mathrm{P}) = 6\mathrm{H}_3+10\mathrm{H}_2+8\mathrm{H}_1+7\mathrm{H}_0$.

23. Considérons $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une solution particulière. Toute autre solution $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{N},\quad (u-p)_{k+2} - 2(u-p)_{k+1} + (u-p)_k &= (u_{k+2}-2u_{k+1}+u_k) - (p_{k+2}-2p_{k+1}+p_k)\\ &= (k^3+2k^2+5k+7)-(k^3+2k^2+5k+7) = 0\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(u-p)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est donnée par $r^2-2r+1 = (r-1)^2$ et il existe donc par le cours $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{R}$ tels que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $u_k = p_k + (\mathrm{A}+\mathrm{B}k)1^k$.

Reste à trouver une solution paticulière. Après calculs, on a $\delta^2(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+2)-2\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)+\mathrm{P}(\mathrm{X})$. Ainsi, si on trouve P tel que $\delta^2(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3+2\mathrm{X}^2+5\mathrm{X}+7$ alors on a, en posant $p_k = \mathrm{P}(k)$ pour $k\in\mathbb{N}$:

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad p_{k+2}-2p_{k-1}+p_k = \mathrm{P}(k+2)-2\mathrm{P}(k+1)+\mathrm{P}(k) = \delta^2(\mathrm{P})(k) = k^3+2k^2+5k+7$$

Avec la question précédente, on peut donc obtenir une solution particulière $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad p_k = 6\mathrm{H}_5(k)+10\mathrm{H}_4(k)+8\mathrm{H}_3(k)+7\mathrm{H}_2(k)$$

En conclusion, les solutions $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ s'écrivent sous la forme :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad u_k = (\mathrm{A}+\mathrm{B}k)+6\mathrm{H}_5(k)+10\mathrm{H}_4(k)+8\mathrm{H}_3(k)+7\mathrm{H}_2(k),\qquad (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$$

Polynômes à valeurs entières

24. Soit $k\in\mathbb{Z}$.

- On suppose $k\in[\![0,n-1]\!]$. On a alors :

$$\mathrm{H}_n(k) = \frac{1}{n!}k\times(k-1)\times\cdots(k-k)\times\cdots(k-n+1) = 0$$

- On suppose maintenant $k\geqslant n$. On a dans ce cas :

$$\mathrm{H}_n(k) = \frac{1}{n!}k\times(k-1)\times\cdots\times(k-n+1) = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \binom{k}{n}$$

- Enfin, si $k<0$, on a, en notant $p=-k$:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(k) = \frac{1}{n!}k\times(k-1)\times\cdots\times(k-n+1) &= \frac{1}{n!}(-p)(-(p+1))\times\cdots\times(-(p+n-1))\\ &= \frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n\binom{p+n-1}{n}\end{aligned}$$

25. Avec la question précédente, les coefficients binomiaux étant entiers, on peut affirmer que $\mathrm{H}_n(k)\in\mathbb{Z}$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $\mathrm{H}_n(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$.

26. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\delta(\mathrm{P})(k) = \mathrm{P}(k+1) - \mathrm{P}(k)$. Le polynôme P étant à valeurs entières sur les entiers, par soustraction de nombres entiers, il en est de même de $\delta(\mathrm{P})$.

27. Si P est à valeurs entières sur les entiers, on peut prouver par récurrence sur $h \in \mathbb{N}$ que $\delta^h(\mathrm{P})(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$. En particulier, les nombres $\delta^h(\mathrm{P})(0) \in \mathbb{Z}$ qui sont les coordonnées de P dans la base $(\mathrm{H}_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ d'après **20.** sont des entiers.

Réciproquement, si les coordonnées $(a_i)_{k \in [\![0,n]\!]}$ de P dans la base $(\mathrm{H}_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont des entiers alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le nombre $\mathrm{P}(k) = \sum_{i=0}^n a_i \mathrm{H}_i(k)$ est également un entier. Ainsi P est à valeurs entières sur les entiers.

28. Supposons que P, de degré d, est à valeurs entières sur les entiers. D'après les questions précédentes, il existe des entiers $a_0, a_1 \dots a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^d a_i \mathrm{H}_i$. Cela donne :

$$d!\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{d} a_i \times d!\mathrm{H}_i = \sum_{i=0}^{d} \left(a_i \times d(d-1) \times \cdots \times (i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1} (\mathrm{X} - j) \right)$$

On remarque qu'il s'agit bien d'un polynôme à coefficients entiers.

La réciproque est fausse comme le montre le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2/2$, de degré 2. En effet, on a $2!\mathrm{P}$ à coefficients entiers, mais $\mathrm{P}(1) = 1/2 \notin \mathbb{Z}$.