DEVOIR SURVEILLÉ N°2

CORRIGÉ

EXERCICE 1 – ÉTUDE DE QUELQUES SÉRIES

1. 1.1. La série étudiée est géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$ et elle est donc convergente. De plus, par le cours et avec un changement de variable $\ell = n-1$, sa somme est donnée par :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

1.2. On commence par calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n}$$

On remarque que $(n^2 b_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 par croissance comparée de sorte que la série de terme général b_n converge par comparaison avec une série de Riemann convergente.

Il reste à calculer la somme. Avec les notations introduites par l'énoncé, par sommation des premiers termes d'une suite géométrique, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction S_n est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \mathrm{S}'_n(x) = \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

On en déduit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} kx^k = x\mathrm{S}'_n(x) = \frac{x-nx^n+(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Supposons $x \in]-1,1[$. On a alors $(nx^n)_{n\geqslant 1}$ et $((n-1)x^{n+1})_{n\geqslant 1}$ qui tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par croissance comparée. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Avec $x = 1/2$, il vient alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

2. 2.1. La suite $(n\ln n)_{n\geqslant 2}$ est clairement croissante et divergente vers $+\infty$. Ainsi, en passant à l'inverse, la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et convergente vers 0.

2.2. On commence par poser :

$$\forall t > 1, \quad f(t) = \frac{1}{t\ln t}$$

La fonction f étant décroissante et continue sur $]1,+\infty[$, on peut utiliser une comparaison série–intégrale :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) = a_k$$

En sommant, et comme $a_1 = 0$, la relation de Chasles donne :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \int_2^{n+1} f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{A}_n$$

Une primitive de f sur $]1, +\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$ et on a donc :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \mathrm{A}_n$$

Le minorant étant divergent vers $+\infty$, on en déduit par comparaison que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi divergente vers $+\infty$. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge.

2.3. On a directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_n = \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2.4. On observe que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad b_n = \frac{1}{\ln n} - \frac{n}{(n+1)\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln n} - \frac{n+1-1}{(n+1)\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} + a_{n+1}$$

En sommant, par téléscopage et en utilisant $b_1 = -a_2$ et $a_1 = 0$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{B}_n = b_1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) + \sum_{k=2}^{n} a_{k+1} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} + \mathrm{A}_{n+1} - 2a_2$$

Enfin, la suite $(1/\ln 2 - 1/\ln(n+1) - 2a_2)_{n\geqslant 1}$ est clairement convergente tandis que la suite $(\mathrm{A}_{n+1})_{n\geqslant 1}$ ne l'est pas puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge. En conclusion, la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente et la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ diverge.

3. **3.1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la somme définissant u_n, il y a n termes. Par décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, le plus petit d'entre eux est a_{2n}. On a donc directement $n a_{2n} \leqslant u_n$.

3.2. On a $u_n = \mathrm{A}_{2n} - \mathrm{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge par hypothèse, la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Par extraction, il en est de même de la suite $(\mathrm{A}_{2n})_{n\geqslant 1}$ et vers la même limite. Cela montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Enfin, puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs par hypothèse, la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant n a_{2n} \leqslant u_n$$

de sorte que l'on obtient le résultat par théorème d'encadrement.

3.3. Posons $c_n = n a_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_{2n} = 2(n a_{2n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Nous allons prouver que la suite $(c_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers 0, ce qui permettra de conclure par résultat de cours sur les suites extraites. Par positivité et décroissante de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant c_{2n+1} = (2n+1)a_{2n+1} \leqslant (2n+1)a_{2n} = c_{2n} + a_{2n+1}$$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et il en est donc de même de la suite extraite $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$. De plus la suite $(c_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle par ce qui précède. Ainsi, le majorant ci-dessus est de limite nulle et, par théorème d'encadrement, la suite $(c_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, ce que l'on voulait.

3.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n &= \sum_{k=1}^{n} k a_k - \sum_{k=1}^{n} k a_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k a_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) a_k \\
&= a_1 + \sum_{k=2}^{n} (k-(k-1)) a_k - n a_{n+1} \\
&= \mathrm{A}_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}
\end{aligned}$$

3.5. Dans le terme de droite de l'égalité prouvée à la question précédente, il faut voir que chacun des termes admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. En effet, le terme A_n converge puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est supposée convergente, le terme $(n+1)a_{n+1}$ converge vers 0 par **3.3** et le terme a_{n+1} converge vers 0 puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Cela permet d'affirmer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donc que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

3.6. Avec les arguments avancés dans la question précédente, un passage à la limite dans l'identité de la question **3.4** donne :

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \lim_{n\to+\infty} A_n \qquad \text{soit} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

4. **4.1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \leqslant n$. Reprenons l'identité de la question **3.4.** :

$$B_n = A_n - na_{n+1} = A_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k - na_{n+1}$$

Par décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dans la somme, il y a $n-m$ termes tous plus grand que a_n et donc aussi que a_{n+1}. On en déduit que :

$$B_n \geqslant A_m + (n-m)a_{n+1} - na_{n+1} = A_m - ma_{n+1}$$

4.2. Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ par convergence de cette dernière et la suite $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle par hypothèse. Ainsi il vient :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \geqslant A_m$$

Ceci montre que la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée. Comme elle est également croissante puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs, elle converge. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

4.3. Maintenant que l'on sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, les hypothèses de la question **3** sont vérifiées et on peut donc prouver de la même façon que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Exercice 2 – Étude d'un reste de série convergente

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(|(-1)^p/p|)_{p\geqslant n+1} = (1/p)_{p\geqslant n+1}$ est décroissante et de limite nulle de sorte que la série définissant R_n est convergente d'après le théorème spécial des séries alternées.

2. **2.1.** On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant n$. On commence par remarquer que :

$$\forall p \geqslant 1, \quad \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \left[\frac{x^p}{p}\right]_0^1 = \frac{1}{p}$$

En utilisant cette égalité, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{p=n+1}^{N} \frac{(-1)^p}{p} &= \sum_{p=n+1}^{N} (-1)^p \int_0^1 x^{p-1}\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{p=n+1}^{N} (-1)^p x^{p-1}\right) dx \\ &= -\int_0^1 \left(\sum_{p=n+1}^{N} (-x)^{p-1}\right) dx\end{aligned}$$

Par sommation des premiers termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{p=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^p}{p} &= -\int_0^1 (-x)^n \frac{1-(-x)^{\mathrm{N}-n}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \frac{(-1)^n x^n - (-1)^{\mathrm{N}} x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \ + \ (-1)^{\mathrm{N}}\int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2.2. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Par positivité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Ainsi, en utilisant le fait que $1+x \geqslant 1$ pour $x \in [0,1]$, on obtient :

$$\left|(-1)^{\mathrm{N}}\int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| = \int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{N}+1}$$

2.3. Avec **2.1**, on a obtenu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \mathrm{N} \geqslant n, \quad \sum_{p=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^p}{p} = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \ + \ \underbrace{(-1)^{\mathrm{N}}\int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x}_{=u_{\mathrm{N}}}$$

Par comparaison, la question **2.2** assure que u_{N} tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Ainsi, en fixant $n \in \mathbb{N}$ et en faisant tendre N vers $+\infty$ dans la relation précédente, il vient :

$$\mathrm{R}_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

3. 3.1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. On intègre par parties en intégrant $x \mapsto x^n$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

D'où le résultat après multiplication par $(-1)^{n+1}$.

3.2. De façon similaire à **2.2**, on obtient :

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

D'où le résultat.

3.3. Avec les questions **3.1** et **3.2**, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_n = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}}_{a_n} + \underbrace{\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{b_n}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente en vertu du théorème spécial des séries alternées puisque la valeur absolue de son terme général est décroissante et de limite nulle. La série $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ est convergente par théorème de comparaison avec une série de Riemann convergente. Par somme, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{R}_n$ est convergente.

3.4. On reprend l'expression de **2.3** pour écrire :

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{R}_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-x)^n\right) \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$
$$= -\int_0^1 \left(\frac{1-x^{\mathrm{N}+1}}{1+x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$
$$= -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x}_{u_{\mathrm{N}}}$$

On peut prouver de la même façon qu'en **2.2** que u_{N} tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ de sorte qu'en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans la relation précédente, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = -\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

Exercice 3 – Une suite définie par un déterminant

1. Étant donné que α et β sont positifs, il vient $(1+\alpha)(1+\beta) = 1+\alpha+\beta+\alpha\beta \geqslant 1+\alpha+\beta$ puisque $\alpha\beta \geqslant 0$.

2. On a immédiatement :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_1 v_1$$

Par développement par rapport à la première colonne, il vient :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2 v_2 - u_1 \begin{vmatrix} -v_1 & 0 \\ u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2 v_2 - u_1(-v_1) = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1$$

3. Soit $n \geqslant 3$. Développons Δ_n par rapport à sa dernière ligne :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1+n} u_n \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \Delta_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & -v_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}$$

Enfin, par développement par rapport à la dernière ligne dans le déterminant précédent, il vient :

$$\Delta_n = u_n v_n \Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}$$

4. Montrons dans un premier temps par récurrence double que $\Delta_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $\Delta_1 = 1 + u_1 v_1 \geqslant 0$ puisque u_1 et v_1 sont positifs et pour $n = 2$, on a $\Delta_2 = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1 \geqslant 0$ puisque u_1, v_1, u_2 et v_2 sont positifs.
- **Hérédité :** Supposons la relation vraie aux rangs n et $n-1$ où $n \geqslant 2$. Alors, étant donné que $a_{n+1} \geqslant 0$, il vient avec la relation de la question précédente $\Delta_{n+1} = \Delta_n + a_{n+1}\Delta_{n-1} \geqslant 0$.

Ainsi, par principe de récurrence, on a $\Delta_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 1$. Avec la relation de la question précédente, cela donne $\Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n \Delta_{n-2} \geqslant 0$ pour $n \geqslant 3$. Enfin, on a également $\Delta_2 - \Delta_1 = u_2 v_2 \geqslant 0$ et on en conclut que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

5. On procède par récurrence double.

- **Initialisation :** Pour $n = 1$ on a $\Delta_1 = 1 + u_1 v_1 = 1 + a_1 \leqslant 1 + a_1$ et pour $n = 2$ on peut écrire grâce à la question **1** que $\Delta_2 = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1 \leqslant (1 + a_1)(1 + a_2)$.
- **Hérédité :** Supposons la relation vérifiée aux rangs n et $n-1$ pour $n \geqslant 2$. Alors, avec la relation de la question **3** et en utilisant à nouveau la question **1**, il vient :

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} = \Delta_n + a_{n+1}\Delta_{n-1} &\leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) + a_{n+1}\prod_{k=1}^{n-1}(1 + a_k)\\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(1 + a_k)(1 + a_n + a_{n+1})\\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n-1}(1 + a_k)(1 + a_n)(1 + a_{n+1})\\ &= \prod_{k=1}^{n+1}(1 + a_k)\end{aligned}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

6. **6.1.** On a clairement $\mathrm{P}_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que la suite $(\ln \mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Notons que $\ln \mathrm{P}_n = \mathrm{S}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1 + a_n)$.
Étant donné que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, on a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers 0, ce qui permet d'écrire :

$$\ln(1 + a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$$

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs donne la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1 + a_n)$ et donc la convergence de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ainsi la suite $(\ln \mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi, disons vers ℓ. Par composition, on obtient que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^{ℓ}.

6.2. Étant convergente, la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. L'inégalité de la question **5** donne alors que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Étant de plus croissante par la question **4**, elle converge.

7. **7.1.** On procède par récurrence double.

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $\Delta_1 = 1 + u_1 v_1 \geqslant 1$ puisque u_1 et v_1 sont positifs et pour $n = 2$, on a $\Delta_2 = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1 \geqslant 1$ puisque u_1, v_1, u_2 et v_2 sont positifs.
- **Hérédité :** Supposons la relation vraie aux rangs n et $n-1$ où $n \geqslant 2$. Alors, étant donné que $a_{n+1} \geqslant 0$, il vient avec la relation de la question **3** $\Delta_{n+1} = \Delta_n + a_{n+1}\Delta_{n-1} \geqslant 1 + a_{n+1} \geqslant 1$.

Ainsi, par principe de récurrence, on a $\Delta_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant 1$.

7.2. Considérons la suite des sommes partielles $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 2}$ de la série $\sum_{n\geqslant 2} t_n$. Par téléscopage, on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{T}_n = \sum_{k=2}^{n} t_k = \sum_{k=2}^{n} \Delta_k - \Delta_{k-1} = \Delta_n - \Delta_1$$

Par hypothèse, la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc il en est de même pour $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 2}$. Cela donne bien la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} t_n$.

7.3. On observe que grâce aux questions **3** et **7.1**, on peut écrire :

$$\forall n \geqslant 3, \quad t_n = a_n\Delta_{n-2} \geqslant a_n \geqslant 0$$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 2} t_n$ est convergente par la question précédente, le théorème de comparaison des séries à termes positifs donne que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

8. On a établi l'équivalence entre la convergence de la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

Exercice 4 – Interpolation polynomiale

1.

- **Linéarité :** On vérifie facilement que si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ alors $\mathrm{T}(\alpha\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \alpha\mathrm{T}(\mathrm{P}) + \mathrm{T}(\mathrm{Q})$, ce qui prouve la linérité de T.
- **Injectivité :** Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$. On a $\mathrm{T}(\mathrm{P}) = 0$ soit $(\mathrm{P}(a_1), \dots, \mathrm{P}(a_n)) = (0, 0, \dots, 0)$ de sorte que P s'annule en au moins n réels distincts. Ainsi P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui s'annule en au moins n points distincts, c'est donc le polynôme nul. On en déduit donc que $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) \subset \{0_\mathrm{E}\}$. Comme l'inclusion réciproque est triviale, il vient $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{0_\mathrm{E}\}$ et T est donc injective.

- **Bijectivité :** On a $\dim(E) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$. Ainsi T est bijective si et seulement si elle est injective, ce qui est le cas d'après le point précédent. T est donc un isomorphisme de E vers $\mathbb{R}^n$.

2. T est un isomorphisme de E vers $\mathbb{R}^n$ donc sa bijection réciproque T^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers E. Or $\mathscr{B}'$ est l'image de $\mathscr{E}$ par T^{-1}. Comme l'image par un isomorphisme d'une base de l'espace de départ est une base de l'espace d'arrivée , on en déduit que $\mathscr{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ est une base de E.

Soit $P \in E$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ de sorte que

$$P = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k \qquad (\star)$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Par définition de L_k, on sait que $T(L_k) = e_k$, ce qui donne :

$$(L_k(a_1), \dots, L_k(a_n)) = (0, \dots, 1, \dots, 0) \quad \text{où le 1 est en } k\text{−ème position}$$

Ainsi $L_k(a_i)$ vaut 1 si $i = k$ et 0 si $i \neq k$. En évaluant $(\star)$ en a_i pour $i \in [\![1, n]\!]$, il vient donc $P(a_i) = \lambda_i$. Ainsi la décomposition de P dans la base $\mathscr{B}'$ est :

$$P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k$$

3. **3.1.** Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, L_k est de degré inférieur à 2 et s'annule en les a_j pour $j \neq k$ et vaut 1 en a_k. Ainsi :

$$L_1 = \frac{(X-1)(X-2)}{2} = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2, \quad L_2 = -X(X-2) = 0 + 2X - X^2 \quad \text{et} \quad L_3 = \frac{X(X-1)}{2} = 0 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$$

On en déduit que la matrice M de (L_1, L_2, L_3) dans $\left(1, X, X^2\right)$ est donnée par :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2. On a :

$$M - I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ si et seulement si $(M - I_3)X = 0$ soit si et seulement si :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -3x + 2y - z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

On conclut que :

$$\mathrm{Ker}(M - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Le vecteur trouvé forme une famille génératrice et libre (car il est non nul) de sorte que c'est une base de $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ qui est donc de dimension 1.

3.3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ que l'on écrit sous la forme $P = a + bX + cX^2$. On a alors :

$$P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 \iff a + bX + cX^2 = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 \iff \begin{cases} a = P(0) \\ b = P(1) \\ c = P(2) \end{cases}$$

Cela donne alors :

$$P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 \iff (a, b, c) = (P(0), P(1), P(2)) \iff (a, b, c) = T(P) \iff P = T^{-1}(a, b, c)$$

Comme M est la matrice de T^{-1} dans les bases $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\mathrm{P}=\mathrm{T}^{-1}(a,b,c) \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\mathrm{M}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_3)$$

Avec la question précédente, cela équivaut à l'existence d'une constante $\alpha\in\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\-\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$$

On en déduit que les polynômes P de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ vérifiant $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(0)+\mathrm{P}(1)\mathrm{X}+\mathrm{P}(2)\mathrm{X}^2$ sont les polynômes qui s'écrivent $\alpha(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-1)$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$.

4. **4.1.** M est la matrice de passage d'une base vers une autre donc M est inversible. De plus, on a vu que M est la matrice de T^{-1} dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ de sorte que M^{-1} est la matrice de T dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{E}$. Or :

$$\forall k\in [\![0,n-1]\!],\quad \mathrm{T}(\mathrm{X}^k)=\begin{pmatrix}a_1^k\\a_2^k\\\vdots\\a_n^k\end{pmatrix}$$

Ainsi on obtient :

$$\mathrm{M}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

4.2. On utilise l'expression obtenue à la question **2** avec le polynôme constant égal à 1. On obtient :

$$1=\sum_{k=1}^{n}1\,(a_k)\,\mathrm{L}_k \iff \sum_{k=1}^{n}\mathrm{L}_k=1$$

4.3. Par définition de M, on a :

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\quad \mathrm{L}_j=\sum_{i=1}^{n}m_{i,j}\mathrm{X}^{i-1}$$

Ainsi :

$$1=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{L}_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}\right)\mathrm{X}^{i-1}$$

Par identification des coefficients des polynômes de gauche et de droite, il vient :

$$\sum_{j=1}^{n}m_{1,j}=1 \qquad \text{et} \qquad \forall i\in[\![2,n]\!],\quad \sum_{j=1}^{n}m_{i,j}=0$$

4.4. On reprend l'expression suivante :

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\quad \mathrm{L}_j=\sum_{i=1}^{n}m_{i,j}\mathrm{X}^{i-1}$$

On a alors, puisque $a_1=1$ dans notre cas :

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\quad \sum_{i=1}^{n}m_{i,j}=\mathrm{L}_j(1)=\mathrm{L}_j\,(a_1)$$

Ainsi on conclut que :

$$\sum_{i=1}^{n}m_{i,1}=1 \quad \text{et} \quad \forall j\in[\![2,n]\!],\quad \sum_{i=1}^{n}m_{i,j}=0$$

5. **5.1.**

- **Noyau :** Soit $P \in E$. On a alors :

$$P \in \mathrm{Ker}(u) \iff u(P) = 0 \iff P(0)L_1 + P(1)L_2 + P(2)L_3 = 0 \iff P(0) = P(1) = P(2) = 0$$

où l'on a utilisé que (L_1, L_2, L_3) est libre pour la dernière équivalence. Ainsi on a :

$$\mathrm{Ker}(u) = \{X(X-1)(X-2)Q,\ Q \in \mathbb{R}_{n-4}[X]\}$$

- **Image :** D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension $\dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3$. Or on a clairement $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3)$ qui est de dimension 3 car (L_1, L_2, L_3) est libre. Ainsi $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3)$.
- **Supplémentarité :** Soit $P \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aL_1 + bL_2 + cL_3$. En évaluant en $0, 1$ et 2, on trouve respectivement $a = 0, b = 0, c = 0$. Donc $P = 0_E$ et $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe. De plus, la somme de leurs dimensions est $\dim(E)$ par le théorème du rang et on en déduit que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E

5.2. On sait déjà que 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité $n-3$ car $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension $n-3$. Par ailleurs on vérifie aisément que $u(L_1) = L_1$, $u(L_2) = L_2$ et $u(L_3) = L_3$. Ainsi, comme (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathrm{Im}(u)$, on en déduit que u induit sur $\mathrm{Im}(u)$ l'endomorphisme identique de $\mathrm{Im}(u)$, c'est-à-dire que 1 est une valeur propre de u et que l'espace propre associé est $\mathrm{Im}(u)$.

Ainsi u est diagonalisable (car la somme des dimensions des sous-espaces propres est n la dimension de E) et ses valeurs propres sont 0 et 1.

Cela permet d'affirmer que u est le projecteur sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$.

⋆ ⋆
⋆