# DEVOIR SURVEILLÉ N°3

SAMEDI 7 NOVEMBRE 2020

**DURÉE :** 4h00

***L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.***
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*Le sujet comporte deux exercices et un problème indépendants entre eux.*

## EXERCICE 1 – MATRICES DE RANG 1

Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on rappelle que $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$.

### PARTIE A

On introduit :

$$\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{V}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_0 = \mathrm{U}_0\,{}^t\mathrm{V}_0$$

1. Calculer $\mathrm{A}_0$. Quel est le rang de $\mathrm{A}_0$ ?
2. Justifier que 0 est valeur propre de $\mathrm{A}_0$ puis déterminer une base du sous-espace propre associé.
3. **3.1.** Calculer $\mathrm{A}_0\mathrm{U}_0$.
   **3.2.** Montrer que $\mathrm{A}_0$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
   **3.3.** Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A}_0 = \mathrm{PDP}^{-1}$.

### PARTIE B

Soit $n \geqslant 2$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

4. On désigne par $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.
   Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $\mathrm{L} = (\ell_1 \cdots \ell_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{CL}$.
5. Vérifier que $\mathrm{LC} = \mathrm{Tr(A)}$ puis montrer que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{Tr(A)A}$ où Tr(A) désigne la trace de A.
6. Soit $\lambda$ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé.
   Montrer que $(\lambda^2 - \mathrm{Tr(A)}\lambda)\mathrm{X} = 0$ et en déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0,\ \mathrm{Tr(A)}\}$.
7. Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
8. Vérifier que Tr(A) est valeur propre de A.
9. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr(A)} \neq 0$.

#### Partie C

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul. On désigne par $u$ un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

**10.** Montrer que $f(u) \neq 0$.

**11.** En déduire que l'endomorphisme $f$ possède une valeur propre réelle non nulle.

**12.** Montrer alors que $f$ est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

## Problème – Matrices de Kac

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients réels et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients complexes.
Dans la suite, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.

#### Partie I – La dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**1.** Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

**2.** En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants.
*On ne demande pas de déterminer les espaces propres de* A *dans cette question.*

**3.** Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_B$ de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

**4.** La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants.
*On ne demande pas de déterminer les espaces propres de* B *dans cette question.*

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \qquad \text{et} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

**5.** Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

**6.** Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$.

#### Partie II – Étude d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![ 0, n ]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x)$$

On note $V_n$ le $\mathbb{C}-$espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\ ,\ \ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}$$

**7.** Montrer que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe $V_n$.

**8.** Pour $k \in [\![0,n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire que $\varphi_n : f \in V_n \mapsto f'$ définit un endomorphisme de $V_n$ et que sa matrice $B_n$ dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$$

**9.** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$$

**10.** En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que l'on a $g_k \in V_n$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

**11.** Pour $k \in [\![0,n]\!]$, calculer $g_k'$. En déduire que $\varphi_n$ est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de $\varphi_n$ et décrire les espaces propres correspondants.

**12.** Pour quelles valeurs de $n$ l'endomorphisme $\varphi_n$ est-il un automorphisme de $V_n$ ?

**13.** Écrire la décomposition de $g_n$ dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\operatorname{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}$$

## Partie III – Les matrices de Kac de taille $n+1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note $A_n$ la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice $A_n$ vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$ ;
- $a_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$ ;
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le $k$−ième terme diagonal $d_{kk}$ vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

**14.** Soient $M = (m_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille $p$ et $D = (d_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille $p$. Exprimer le terme général de la matrice $DM$ en fonction des $m_{kl}$ et des $d_{kl}$, puis exprimer le terme général de la matrice $MD$ en fonction des $m_{kl}$ et des $d_{kl}$.

**15.** Montrer que $D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n$ où $B_n$ est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où $\chi_{A_n}$ et $\chi_{B_n}$ sont les polynômes caractéristiques respectifs de $A_n$ et $B_n$.

16. En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que $A_n$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de $A_n$ sont les entiers de la forme $2k-n$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et que :

$$\mathrm{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad p_k = \binom{n}{k}$$

## Exercice 2 – Classe de similitude des matrices nilpotentes

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$−espace vectoriel de dimension $n$. On note par ailleurs $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients complexes.
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, un endomorphisme de E est nilpotent d'indice $p$ si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est nilpotente d'indice $p$.

On pose enfin :

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

### Partie I – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

On suppose que $n = 2$. Soit $u$ un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

2. Montrer qu'il existe un vecteur $x$ de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
3. Vérifier que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.
5. Construire une base de E dans laquelle la matrice de $u$ est égale à $J_2$.
6. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

### Partie II – Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

7. Montrer que, si A est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de A.
8. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables ?
9. Montrer qu'une matrice est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est égal à $X^n$.
10. Montrer la réciproque de la question **7**.
11. Montrer qu'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.
12. Démontrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice $p$, alors tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de $X^p$ est un polynôme annulateur de A.

On suppose que P est un polynôme annulateur de A nilpotente.

13. Démontrer que 0 est racine de P.
14. On note $m$ la multiplicité de 0 dans P, ce qui permet d'écrire $P = X^m Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Démontrer que $Q(A)$ est inversible puis que P est un multiple de $X^p$ dans $\mathbb{C}[X]$.