INTÉGRATION

T.D. N°9

EXERCICE 1 ●○○ *Études d'intégrales*

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de l'intégrale :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{t^3+1}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t^3+1}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{t^3+t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$

EXERCICE 2 ●○○ *Études et calculs d'intégrales*

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de l'intégrale et calculer sa valeur en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{t^{10}+1}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 2t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

EXERCICE 3 ●●○ *Calculs d'intégrales par récurrence*

Grâce à des intégrations par parties, prouver l'existence et donner la valeur des intégrales définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_n = \int_0^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t$$

EXERCICE 4 ●●○ *Calculs d'intégrales généralisées*

1. Par une intégration par parties, calculer :
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$
2. Par mise sous forme canonique du dénominateur puis changement de variable, calculer :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$$
3. Prouver l'existence de l'intégrale suivante puis la calculer avec le changement de variable $t = 1/x$:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
4. Pour $\alpha > 0$ et $\omega\in\mathbb{R}$, calculer les intégrales :
$$\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

EXERCICE 5 ●●○ *Équivalent d'une suite d'intégrales*

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose, sous réserve d'existence :

$$\mathrm{I}_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n(1+t^2)}$$

1. Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 ●●○ — *Calculs d'intégrales*

On introduit les trois intégrales suivantes :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t$$

1. Par le changement de variable $x = t - 1/t$, prouver l'existence et donner la valeur de I.
2. En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 7 ●●○ — *Calculs d'une intégrale*

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{I}(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$$

1. Donner les valeurs de a pour lesquelles l'intégrale $\mathrm{I}(a)$ est convergente.
2. Grâce au changement de variable $u = 1/t$, donner la valeur de $\mathrm{I}(a)$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 ●●○ — *Calculs d'intégrales*

On introduit les deux intégrales suivantes :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que les deux intégrales I et J sont convergentes et qu'elles sont égales.
2. En étudiant $\mathrm{I}+\mathrm{J}$, déterminer leur valeur commune.

Exercice 9 ●●● — *Calcul d'une intégrale*

Pour $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs, on considère l'intégrale I suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'intégrale I est convergente.
2. Prouver que la limite suivante existe et donner sa valeur :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

3. En déduire la valeur de I.

Exercice 10 ●●● — *Une intégrale semi-convergente*

On s'intéresse à l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la quantité :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| \mathrm{d}t$$

L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

2. Établir la convergence de l'intégrale I tout en prouvant l'identité :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 11 ●○○ — *Calculs de limites*

Dans chacun des cas suivants, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

1. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t^2} \mathrm{d}t$
2. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{nt^2+e^t} \mathrm{d}t$
3. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^n} \mathrm{d}t$
4. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\pi - t} \sin^n t \, \mathrm{d}t$
5. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{t^{2n}+t^n+1} \mathrm{d}t$
6. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{n} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$

Exercice 12 ●○○ — *Étude d'une intégrale à paramètre*

On définit une fonction f en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^3} \mathrm{d}t$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13 ●●○ — *Une expression intégrale de $\zeta(2)$*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+1} \ln t}{t^2-1} \mathrm{d}t$$

1. Justifier l'existence des intégrales J_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la différence $\mathrm{J}_n - \mathrm{J}_{n+1}$.
3. En déduire l'identité :

$$\int_0^1 \frac{t \ln t}{t^2-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 14 ●●○ — *Une identité série – intégrale*

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t-1} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p!}{n^{p+1}}$$

Exercice 15 ●●○ — *Étude d'une intégrale à paramètre*

On définit une fonction f en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer f' à l'aide d'une intégrale.
3. Calculer f' en s'aidant de la relation suivante, que l'on démontrera :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2} - \frac{x}{1+xt}\right)$$

Exercice 16 ●●○ — *Calcul de l'intégrale de Gauss*

On définit deux fonctions g et h sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad h(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que g et h sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées.
2. Montrer que la fonction $g + h^2$ est constante et déterminer la valeur de cette constante.
3. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale *de Gauss* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17 ●●○ — *Étude d'une intégrale à paramètre*

On définit une fonction F en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par F sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 ●●○ — *La fonction Γ d'Euler*

On définit une fonction Γ en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale définissant $\Gamma(x)$ est bien convergente.
2. Montrer que la fonction Γ est continue sur D.
3. Prouver que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x \in \mathrm{D}$.
4. Exprimer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19 ●●● — *Transformée de Laplace*

On se donne $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée. On appelle *transformée de Laplace* de f l'application $\mathscr{L}(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de $x\mathscr{L}(f)(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Si f admet une limite λ en $+\infty$, déterminer la limite de $x\mathscr{L}(f)(x)$ lorsque x tend vers 0^+.